65 Pages

230 S.P

دورات

رياضيات 3

- هندسة فراغية
- تكامل ثنائي
- تكامل ثلاثي
- تكامل خطي و سطحي
- تحليل شعاعي

هندسة الميكانيك العام

السنة الثانية

#VivaRBCs

فريق الكريات الحمراء التطوعي

RBCs HAMAK

المستويات الفراغية :

لإيجاد معادلات مستقيم هو الفصل المشترك لمستويين :

1. نقوم بأخذ نواظم هذين المستويين ولتكن n_1, n_2
2. نوجد الجداء الخارجي لهما $\vec{v} = \overrightarrow{n_1} \wedge \overrightarrow{n_2}$ أصبح لدينا شعاع يوازي لمستقيم المطلوب والباقي أن نوجد نقطة من المستقيم.
3. نعوض إحداثيي واحد من الإحداثيات (x, y, z) ونفرض أي قيمة اختيارية والأسهل بأن نفرض إما $x = 0$ أو $y = 0$ أو $z = 0$ ونعوضها في معادلتين المستويين ويصبح لدينا معادلتين بمجهولين يمكن حلها وعندها يصبح لدينا مستقيم موجه يوازي المستقيم المطلوب ونقطة في المستوي وتكتب المعادلات .

لبرهان أن مستقيمين يقعان في مستوي واحد وهذين المستقيمين معطيين إما ديكارتيا أو وسيطيا نقوم بما يلي :

1. نوجد المتجه الشعاعي لكلا المستقيمين $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}$
2. من ثم نوجد نقطة من المستقيم الأول وأخرى من الثاني ونوجد إحداثيات المستقيم المار من هاتين النقطتين

نوجد الجداء المختلط للمستقيمات الثلاث ويجب أن يكون الناتج صفر وهذا هو الشرط لكي يكون L_1, L_2 في مستوي واحد

ولإيجاد ذلك المستوي الذي يحوي هذين المستقيمين نقوم بأخذ شعاعي توجيههما و أي نقطة من أي مستقيم اصبح لدينا مستقيمان و نقطة من المستوي و بالتعويض نوجده

تعطى معادلة المستوي بالشكل العام:

$$p(x - x_0) + q(y - y_0) + k(z - z_0) + h = 0$$

حيث أن p,q,k هي احداثيات الناظم على هذا المستوي و h بعد المستوي عن محور الإحداثيات اعلى.

$M_0(x_0, y_0, z_0)$ هي نقطة معلومة تنتمي الى هذا المستوي.

الجداء الداخلي:

ويتم من خلاله حساب الزاوية بين مستقيمين أو مستويين

$$\vec{u}.\vec{v} = |\vec{u}|.|\vec{v}|cos\theta$$

بالنسبة للمستويين ان الزاوية بين مستويين تساوي الى الزاوية بين ناظميهما لذلك نأخذ احداثيات ناظميهما و نطبق القانون عليهما

الجداء الخارجي :

لشعاعين $\vec{v}(x_2, y_2, z_2)$ $\vec{u}(x_1, y_1, z_1)$

$$\vec{v} \wedge \vec{u} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

في حال كان شعاعين متوازيين ويكون الجداء الخارجي لهما يساوي الصفر .

في حال كان الشعاعين متعامدين كان الجداء الداخلي لهما يساوي الصفر.

الجداء المختلط :

وهو عبارة عن جداء داخلي وخارجي بآن واحد ومن خلاله يقوم بإثبات بأن مستقيمين يقعان في مستوي واحد حيث يكفي لإثبات أن مستقيمين يقعان في مستوي واحد حيث يكفي لإثبات أن الجداء المختلط يساوي الصفر ليكن لدينا المستقيمين :

$$L_1: \frac{x - x_0}{x_{v_1}} = \frac{y - y_0}{y_{v_1}} = \frac{z - z_0}{z_{v_1}}$$

حيث أن شعاع توجيه L_1 هو $v_1(x_1, y_1, z_1)$ والنقطة التي تنتمي له هي $M_0(x_0, y_0, z_0)$

$$L_2: \begin{cases} x = x_{v_2}.t + x_2 \\ x = y_{v_2}.t + y_2 \\ x = z_{v_2}.t + z_2 \end{cases}$$

حيث أن شعاع توجيه L_2 هو v_2 و النقطة التي تنتمي له هي $M_2(x_2, y_2, z_2)$ نوجد إحداثيات المستقيم M_0M_2 وبعد ذلك نكتب المحدد:

$$M_0M_2.(v_1 \wedge v_2) = \begin{vmatrix} x_2 - x_0 & y_2 - y_0 & z_2 - z_0 \\ x_{v_1} & y_{v_1} & z_{v_1} \\ x_{v_2} & y_{v_2} & z_{v_2} \end{vmatrix} = 0$$

علاقة بعد نقطة A عن مستقيم :

$$d = \frac{|A.\overrightarrow{M_0} \wedge \vec{v}|}{|\vec{v}|}$$

حيث أن $\vec{v}$ هو شعاع توجيه المستقيم و M_0 نقطة تنتمي الى مستقيم وA النقطة تقع خارج المستقيم .

علاقة بعد نقطة عن مستوي :

$$d = \frac{|p(x_0) + q(y_0) + k(z_0) + h|}{\sqrt{p^2 + q^2 + k^2}}$$

حيث أن $\vec{n}(p, q, k)$ هو ناظم المستوي

ملاحظات ومفاتيح حل المسائل

عند برهان أن مستوي يمس كرة نقوم بما يلي:

1. نوجد مركز الكرة.
2. نوجد شعاع توجيه (ناظم) المستوي الآخر .
3. نوجد بعد مركز الكرة عن المستوي وذلك بتطبيق قانون بعد النقطة مستوي حيث أن النقطة هي مركز الكرة فإذا كان البعد مساوي لنصف قطر الكرة يكون المستوي المماس له وإن كان أصغر من نصف القطر الكرة فيكون المستوي قاطع الكرة بنقطتين. وإذا كان البعد الأكبر من نصف قطر الكرة فإن المستوي لا يمر من الكرة .

تعطى معادلة المستوي الذي يقطع المحاور الإحداثية من النقاط A, B, C هي:

$$\frac{x}{A}+\frac{y}{B}+\frac{z}{C}=1$$

عندما يطلب إيجاد مركز دائرة ناتج عن تقاطع كرة مع مستوي نقوم بالتالي:

ناخذ ناظم المستوي الذي يقطع الكرة ونكرر بأن الناظم يؤخذ من أمثال x, y, z لمعادلة المستوي و يجب ان تكون كل من x, y, z في طرف واحد أي أن الطرف الأيمن يجب أن يساوي الصفر وبعد ذلك نكتب معادلة المستقيم المار من مركز الدائرة ومركز الكرة (لأنهما على استقامة واحدة) وليكن مركز الكرة $M_0(x_0, y_0, z_0)$ ومركز الدائرة $M_1(x_1, y_1, z_1)$ فتكون معادلة المستقيم هي:

$$\frac{x-x_0}{x_1-x_0}=\frac{y-y_0}{y_1-y_0}=\frac{z-z_0}{z_1-z_0}$$

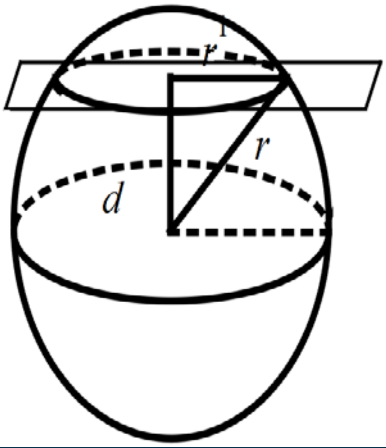
وبما أن ناظم المستوي يوازي المستقيم إذا فإنه يصلح لان يكون شعاع توجيهه والذي يمثل في معادلات المستقيم بمقامات معادلة المستقيم متساويان أي أن :

$$\begin{cases} p=x_1-x_0 \leftrightarrow x_1=p+x_0 \\ q=y_1-y_0 \leftrightarrow x_1=q+y_0 \\ k=z_1-z_0 \leftrightarrow z_1=k+x_0 \end{cases}$$

ومنه نوجد إحداثيات مركز الدائرة المطلوبة .

وعند طلب نصف قطر تلك الدائرة :

نقوم بإيجاد البعد بين مركز الدائرة ومركز الكرة وكما أننا نملك نصف قطر الكرة وحسب مبرهنة فيثاغورث نقوم بإيجاد نصف قطر الدائرة المطلوبة والشكل يوضع المثلث القائم .



حل مسائل الفراغية

التمرين الأول

أوجد معادلة المستوي المماس ومعادلات المستقيم الناظم للسطح $z = x^2 + y^2$ عند $M(2,-1,5)$

الحل:

$$x^2 + y^2 - z = 0$$

$$\frac{df}{dx} = 2x \to 4, \frac{df}{dy} = 2y \to -2, \frac{df}{dz} = -1$$

معادلة المستوي المماس : $4(x-2) - 2(y+1) - (z-5) = 0$

$$4x - 8 - 2y - 2 - z + 5 = 0$$

$$4x - 2y - z - 5 = 0$$

معادلات المستقيم الناظم : $\frac{x-2}{4} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-5}{-1}$

التمرين الثاني:

برهن أنه إذا حدد أي مستوي مماسي للسطح:

$$F(x,y,z) = x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} + z^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}} \qquad ; a \neq 0$$

الأطوال A،B ، C على محاور الاحداثيات فبرهن أن: $A^2 + B^2 + C^2 = a^2$

ثم أثبت فيما كان المستوي مصقولا أم لا

الحل :

نأخذ المشتقات الجزئية

$$\frac{d(f)}{d(x)} = \frac{2}{3}x^{\frac{-1}{3}}$$
$$\frac{d(f)}{d(y)} = \frac{2}{3}y^{\frac{-1}{3}}$$
$$\frac{d(f)}{d(z)} = \frac{2}{3}z^{\frac{-1}{3}}$$

نلاحظ أن المشتقات الجزئية معرفة ومستمرة ماعدا القيم التي تعدم المقام (كون الأسس سالبة فانهم يقعون في المقام) اذن النقطة $O(0,0,0)$ نقطة شاذة ولكن هذه النقطة لا تحقق معادلة المستوي فهي غير موجودة على المستوي المطلوب إذا المستوي مصقول

لنكتب معادلة المستوي المماس في نقطة ما منه ولتكن (x_0, y_0, z_0)

$$\frac{2}{3}x_0^{\frac{-1}{3}}(x - x_0) + \frac{2}{3}y_0^{\frac{-1}{3}}(y - y_0) + \frac{2}{3}z_0^{\frac{-1}{3}}(z - z_0) = 0$$

$$xx_0^{\frac{-1}{3}} + yy_0^{\frac{-1}{3}} + zz_0^{\frac{-1}{3}} - \underbrace{\left(x_0^{\frac{2}{3}} + y_0^{\frac{2}{3}} + z_0^{\frac{2}{3}}\right)}_{=\, a^{\frac{2}{3}}} = 0$$

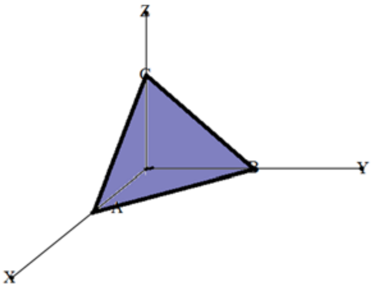
$$xx_0^{\frac{-1}{3}} + yy_0^{\frac{-1}{3}} + zz_0^{\frac{-1}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$$

نقسم على $a^{\frac{2}{3}}$ ونجعل القوى موجبة (أي نجعل العناصر ذات القوة السالبة للمقام) فيكون:

$$\frac{x}{x_0^{\frac{1}{3}}a^{\frac{2}{3}}}+\frac{y}{a^{\frac{2}{3}}y_0^{\frac{1}{3}}}+\frac{z}{a^{\frac{2}{3}}z_0^{\frac{1}{3}}}=1$$

ان كل مقام يشكل كل من: A B C

لأن معادلة المستوي الذي يحدد على محاور الاحداثيات الشكل التالي يعطى بالعلاقة : $\frac{x}{A}+\frac{y}{B}+\frac{z}{C}=1$



وبالمطابقة بين العلاقتين نجد أنه يجب أن تكون مجموع مربعات المقامات هي a^2

نقوم بتربيع مقامات العلاقة السابقة وجمعها فيكون:

$$x_0^{\frac{2}{3}}a^{\frac{4}{3}}+a^{\frac{4}{3}}y_0^{\frac{2}{3}}+a^{\frac{4}{3}}z_0^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{4}{3}}\left(x_0^{\frac{2}{3}}+y_0^{\frac{2}{3}}+z_0^{\frac{2}{3}}\right)=a^{\frac{4}{3}}a^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{6}{3}}=a^2$$ و هو المطلوب

التمرين الثالث:

حدد قيمة λ حتى يكون المستقيم المار بالنقطتين $A(0,0,1),B(0,1,2)$ مماسا للكرة :

$$x^2+y^2+z^2-4y-2z+\lambda=0$$

الحل:

لنوجد أولا معادلات المستقيم المار بنقطتين :

$$\frac{x-0}{0-0}=\frac{y-0}{1-0}=\frac{z-1}{2-1}$$

$$\frac{x}{0}=\frac{y}{1}=\frac{z-1}{1}$$

شعاع التوجيه هو:

$$\vec{v}(0,1,1)$$

$$x^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 5 - \lambda$$

$$d = \frac{|M_0.A \wedge \vec{v}|}{|\vec{v}|}$$

$$M_0\vec{A} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -\vec{i} - 0\vec{j} + 0\vec{k} \to |M_0.A \wedge \vec{v}| = 1$$

$$d = \frac{1}{\sqrt{2}} = r'$$

$$r' = \sqrt{5-\lambda} \to \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{5-\lambda} \to \lambda = 4.5$$

التمرين الرابع

أوجد معادلة المستوي المار من النقطة $A(1,0,0)$ ومن الفصل المشترك للمستويين :

$$p_1: 2x - y + z + 7 = 0$$

$$p_2: -x + y + z - 3 = 0$$

الحل:

لنوجد أولا المعادلات الوسيطية للفصل المشترك :

$\vec{n}_1 = (2,-1,1)$ $\vec{n}_2 = (-1,1,1)$

$$\vec{v} = \overrightarrow{n_1} \wedge \overrightarrow{n_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k} \leftrightarrow \vec{v}(0,-3,1)$$

نعوض $X = 0$ في المستويين فيكون:

$$z = y - 7$$

$$y + y - 7 - 3 = 0$$

$$2y = 10$$

$$y = 5 \leftrightarrow z = -2$$

$$B(0,5,-2)$$

وهي نقطة تنتمي للمستقيم ولنكتب الآن معادلات المستقيم المار من B والموازي للمتجه v

$$\frac{x - x_B}{x_v} = \frac{y - y_B}{y_v} = \frac{z - z_B}{z_v}$$

$$\frac{x - 0}{0} = \frac{y - 5}{-3} = \frac{z + 2}{1} = t$$

$$L\begin{cases} x = 0 \\ y = 5 - 3t \\ z = t - 2 \end{cases}$$

لنوجد نقطة أخرى من المستقيم ولتكن C عندها يكون لدينا ثلاث نقاط لا تقع على استقامة واحدة تمكننا من إيجاد معادلة المستوي المطلوب :

لنعوض الوسيط t=2 هذا يعطي: $c(0,-1,0)$**: إذا لدينا :** $\begin{cases} A(1,0,0) \\ B(0,5,-2) \\ c(0,-1,0) \end{cases}$

إذا معادلة المستوي : $p: \begin{vmatrix} x-1 & y-0 & z-0 \\ 0-1 & 5-0 & -2-0 \\ 0-1 & -1-0 & 0-0 \end{vmatrix} = 0$

$$p: \begin{vmatrix} x-1 & y & z \\ -1 & 5 & -2 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$p: -2(x-1) + 2y + 6z = 0$$

$$-2x + 2 + 2y + 6z = 0$$

$$-2x + 2y + 6z + 2 = 0$$

التمرين الخامس

برهن أن L_1,L_2 يقعان في المستوي واحد ومن ثم أوجد ذلك المستوي :

$$L_1:\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{-3}=\frac{z-5}{4}$$

$$L_2:\begin{cases} x=3t+7 \\ y=2t+2 \\ z=-2t+1 \end{cases}$$

الحل:

$$v_1=(2,-3,4) \qquad v_2=(3,2,-2)$$

نقطة من L_1 هي: $M_1(1,-2,5)$

ونقطة من L_2 هي : $M_2(7,2,1)$

$$M_1M_2=6\vec{i}+4\vec{j}-4\vec{k}$$

الشرط اللازم الكافي ليكون L_1,L_2 يقعان في مستوي واحد أن يكون الجداء المختلط للمستقيمين يساوي الصفر:

$$M_1M_2.(\vec{v_1}\wedge\vec{v_2})=\begin{vmatrix} 6 & 4 & -4 \\ 2 & -3 & 4 \\ 3 & 2 & -2 \end{vmatrix}=6(-2)-4(-16)-4(13)=4(0)=0$$

إذا L_1,L_2 يقعان في مستوي واحد ولإيجاده نأخذ شعاعي توجيه المستقيمين ونقطة معروفة ولتكن M_1 فيكون :

$$MM_1.(\vec{v_1}\wedge\vec{v_2})=\begin{vmatrix} x-1 & y+2 & z-5 \\ 2 & -3 & 4 \\ 3 & 2 & -2 \end{vmatrix}=0$$

$$(x-1)(-2)-(y+2)(-16)+(z-5)(13)=0$$

$$-2x+16y+2+32+13z-65=0$$

$$-2x+16y+13z-31=0$$

التمرين السادس:

أوجد معادلة المستوي المار بالنقاط الثلاث :

النقطة: $M_1(1,1,1)$ **والنقطة الشاذة للسطح:** $F(x,y,z) = xy + yz + 2xz$

ومركز تناظر المجسم $x^2 + 2y^2 + 4z^2 - 4y + 8z = 0$

الحل:

لتكن النقطة شاذة يجب أن تكون المشتقات الجزئية للسطح كلها معدومة عنه:

$$\frac{df}{dx} = y + 2z \quad , \frac{df}{dz} = y + 2x \quad , \frac{df}{dy} = x + z$$

ولإيجاد مركز تناظر المجسم نقوم بإصلاح العلاقة:

$$x^2 + 2y^2 + 4z^2 + 4x - 4y + 8z - 2 = 0$$

$$(x+2)^2 - 4 + 2[(y-1)^2 - 1] + 4[(z+1)^2 - 1] - 2 = 0$$

$$(x+2)^2 + 2(y-2)^2 - 2 + 4(z+4)^2 - 4 - 2 - 4 = 0$$

$$(x+2)^2 + 2(y-2)^2 + 4(z+4)^2 = 12$$

$$\frac{(x+2)^2}{12} + \frac{(y-2)^2}{6} + \frac{(z+4)^2}{3} = 1$$

وهو عبارة عن مجسم قطع ناقص ومركز تناظره هو $(-2,2,-4)$ **ومن ثم نوجد معادلة المستوي المار من ثلاث نقاط.**

التمرين السابع

ليكن لدينا $B(1,-2,2)$ $A(2,-1,3)$ نقطتان من R^3

1. احسب طول $\vec{AB}$ ثم اكتب معادلة المستوي المار من $p(1,-2,1)$ والعمودي على $\vec{AB}$
2. أوجد المستويات الموازية لـ $x+y+z=0$ والتي تبعد عنه مسافة d=1 ؟
3. أوجدي الزاوية بين المستويين : $3x+3y+3z+13=0$ $-x-y-z+\sqrt{3}=0$

$$\vec{AB}=-\vec{i}-\vec{j}-\vec{k}$$

$$|\vec{AB}|=\sqrt{3}$$

معادلة المستوي الذي يمر من p والعمودي على AB

$$-(x-1)-(y+2)-(z-1)=0 \rightarrow x+y+z=0$$

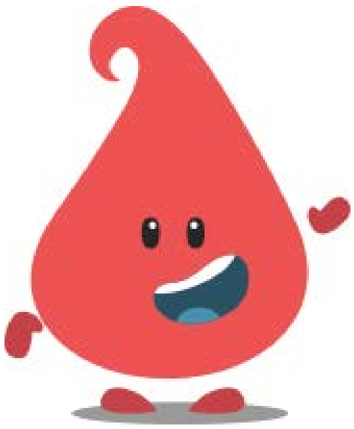
الزاوية بين المستويين تساوي الزاوية بين ناظمي المستويين:

$\vec{n_1}(3,3,3)$ $\vec{n_2}(-1,-1,-1)$

نلاحظ أن نسبة مركبات الناظم الأول الى الثاني متناسبة

$$\frac{3}{-1}=\frac{3}{-1}=\frac{3}{-1}$$

هذا يعني أن النواظم متوازية وإذا بما ان النواظم متوازية فإن المستويين متوازيان $\theta=\pi$ لأن إشارة الناظم الأول بعكس جهة الناظم الأخر



التمرين الثامن

برهن أن المجسم $s_1: z = x^2 + y^2$ والمستوي $p: z = y + 2$ يتقاطعان على الأسطوانة

$$x^2 + (y-1)^2 = 1$$

ثم أوجد معادلة المستوي المماس ل s_1 وذلك عند النقطة التي يكون عندها موازيا ل p ؟

الحل:

من معادلة الاسطوانة:

$$x^2 + (y-1)^2 = 1$$
$$x^2 + y^2 - 2y + 1 = 1 \to x^2 + y^2 = 2y$$

و من بالمطابقة مع معادلة المجسم و المستوي نجد:

$$2y = y + 2 \to y = 2 \to x = 0, z = 4$$

إذا النقطة $(0, 2, 4)$ نقطة مشتركة واقعة على الأسطوانة و تمر في المستوي و المجسم

2) بفرض أن $M_0(x_0, y_0, z_0)$ نقطة من السطح S وأن المستوي المماس عند هذه النقطة يوازي P إذا معادلة المستوي هي:

$$p(x - x_0) + q(y - y_0) + r(z - z_0) = 0$$

إذا علينا الان تحديد M_0

إن شرط توازي ناظمي السطحين S و P هو أن تكون نسب مشتقات مركباتهما يساوي ثابت أي:

$$\frac{2x}{0} = \frac{2y}{-1} = \frac{1}{1}$$

حيث أن البسوط هي مشتقات المجسم S و المقامات مشتقات المستوي P بأخذ أول طرفين للمساواة يكون: $\frac{2x}{0} = \frac{2y}{-1}$

$$-2x = 0 \to x = 0$$

بأخذ ثاني طرفين للمعادلة: $\frac{2y}{-1} = \frac{1}{1}$

$$2y = -1 \rightarrow y = -\frac{1}{2}$$

و نحدد قيمة ال **z** وذلك بتعويض كل من **x** و **y** في معادلة المجسم فيكون:

$$z = 0 + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

إذا أصبحت النقطة هي $M_0\left(0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$

و إن كل من **p,q,r** هي عبارة عن أمثال المستوي إذا أصبحت معادلة المستوي هي:

$$0(x-0) - 1\left(y+\frac{1}{2}\right) + \left(z-\frac{1}{4}\right) = 0$$

$$z = y + \frac{1}{2}$$

التمرين التاسع:

أوجد نصف قطر و مركز دائرة تقاطع الكرة المعطاة بالمعادلة:

$$S \equiv x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y + 4z - 43 = 0$$

مع المستوي $P \equiv x + 2y + 2z - 9$

الحل:

لنقوم أولا بإصلاح معادلة الكرة و ذلك لإيجاد مركز الكرة و نصف قطرها

$$S \equiv (x-1)^2 - 1 + (y+1)^2 - 1(z+2)^2 - 4 - 43 = 0$$
$$S \equiv (x-1)^2 + (y+1)^2 + (z+2)^2 = 49$$

وهي معادلة كرة نصف قطرها 7 و مركزها:$O(1,-1,-2)$

و الان لنوجد بعد مركز الكرة عن عن المستوي P

$$d = \frac{|1 - 2(-1) + 2(-2) - 9|}{|\sqrt{1+4+4}|} = \frac{14}{3}$$

وحسب مبرهنة فيثاغورث نوجد نصف قطر الدائرة المطلوبة:

$$r_1^2 = 49 - \left(\frac{14}{3}\right)^2 =\approx 27.2 \rightarrow r_1 = 5.2$$

و الايجاد مركز الدائرة المطلوبة نوجد المستقيم المار من مركز الكرة و مركز الدائرة

و نوجد الناظم على المستوي و بما أن ناظم المستوي عمودي على المستوي فهو يوازي المستقيم المار من مركزي الكرة و الدائرة اذا فهو يصلح لأن يكون شعاع توجيه للمستقيم ومن هذه المناقشة نجد:

ناظم المستوي P : $\vec{n}(1,2,2)$

معادلة المستقيم المارة من مركز الدائرة $M(x_1, y_1, z_1)$ **و مركز الكرة** $O(1,-1,-2)$

$$\frac{x-1}{x_1-1} = \frac{y+1}{y_1+1} = \frac{z+2}{z_1+2}$$

ان مقامات المستقيم عبارة عن احداثيات شعاع التوجيه و بالمطابقة بين المقامات و احداثيات الناظم نجد:

$$x_1 - 1 = 1 \rightarrow x_1 = 2$$

$$y_1 + 1 = 2 \rightarrow y_1 = 1$$

$$z_1 + 2 = 2 \rightarrow z_1 = 0$$

وهي احداثيات مركز الدائرة المطلوب ^_^

التمرين العاشر

ليكن لدينا المستقيم :

$$L \equiv \frac{x}{2} = y - 1 = \frac{z+1}{-2}$$

والمستوي $P \equiv x + z + 2 = 0$

والمطلوب:

1. أوجد معادلة الكرة S مركزها النقطة $A(1,1,0)$ و المماسة للمستقيم L
2. بين وضع المستوي بالنسبة للكرة
3. أوجد على الكرة أقرب نقطة و أبعد نقطة عن المستوي P
4. بين بالرسم ماذا تمثل المعادلة التالية $y^2 + (z-1)^2 = 0$ في الفراغ xyz

الحل:

1) **لنوجد بعد مركز الكرة عن المستقيم و التي تمثل نصف قطر الكرة :**

$$d = \frac{|A.M_0 \wedge \vec{v}|}{|\vec{v}|}$$

$$v(2,1,-2) \quad ,A(0,1,-1) \quad ,M_0(0,1,-1)$$

$$A.M_0 = (-1,0,-1)$$

$$A.M_0 \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \vec{i} + 4\vec{j} - \vec{k}$$

$$d = \frac{|\sqrt{1+16+1}|}{\sqrt{4+4+1}} = \frac{3\sqrt{2}}{3} = \sqrt{2}$$

إذا معادلة الكرة المطلوبة هي:

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 2$$

2) لنبين وضع المستوي بالنسبة للكرة نقوم بإيجاد بعد هذا المستوي عن المركز فإذا كان أصغر من نصف قطر الكرة فإن المستوي داخل الدائرة و اذا كان يساويه فإنه يمس الكرة بنقطة و إن كان أكبر من نصف القطر فإن المستوي خارج الدائرة :

$$d=\frac{|1+0+0+2|}{\sqrt{2}}=\frac{3}{\sqrt{2}}>\sqrt{2}\ \rightarrow$$ اذا المستوي خارج الدائرة

3) لنوجد الناظم للمستوي $\vec{n}(1,0,1)$

معادلة المستقيم الذي يمر من A و من نقطة التماس M

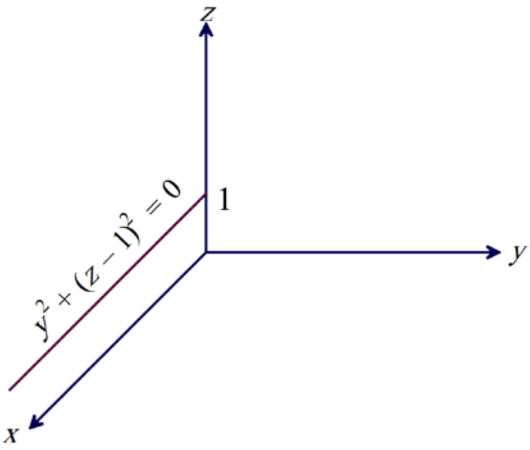
$$\frac{x-1}{x_1-1}=\frac{y-1}{y_1-1}=\frac{z}{z_1}$$

$$x_1-1=1\rightarrow x_1=2$$

$$y_1+1=0\rightarrow y_1=-1$$

$$z_1=1\rightarrow z_1=1$$

لايجاد أبعد نقطة عن المستوي يجب أن تكون نظيرة النقطة M بالنسبة لمركز التناظر و الذي هو منطبق على مركز الكرة إذا لايجادها نطبق قانون إيجاد احداثيات مركز تناظر المستقيم (محور الكرة) MM_1



$$x_A=\frac{x_M+x_{M1}}{2}\rightarrow 2=2+x_{M1}\rightarrow x_{M1}=0$$

$$y_A=\frac{y_M+y_{M1}}{2}\rightarrow 2=1+y_{M1}\rightarrow y_{M1}=1$$

$$z_A=\frac{z_M+z_{M1}}{2}\rightarrow 0=1+z_{M1}\rightarrow z_{M1}=-1$$

وهي احداثيات النقطة الأخرى المطلوبة

4) نلاحظ أنه عند أخذ أي قيمة ل x فإن المعادلة محققة و بما أن هذه المعادلة عبارة عن مجموع مربعي عددين و الطرف الاخر يساوي الصفر فإن حل هذه المعادلة يجب أن يكون $x=$ أي قيمة تعطى $,y=0\quad ,z=1$ من هنا نستنتج أن المعادلة تمثل معادلة مستقيم يمر من النقطة $M(0,0,1)$ و يوازي المحور ox

التمرين الحادي عشر

ليكن لدينا Γ المنحني المعطى بالمعادلات الوسيطية التالية:

$$\Gamma = \begin{cases} x = a\cos(t) \\ y = a\sin(t) \\ bt \end{cases}$$

برهن أن المنحني Γ منحني أملس ثم أوجد معادلات المستقيم المماس ومعادلة المستوي الناظم لهذا المنحني في النقطة الموافقة $t = \frac{\pi}{4}$

الحل

نلاحظ أن المعادلات الممثلة لهذا المنحني هي عبارة عن معادلات ذات توابع مثلثية حيث أن a،b عبارة عن ثوابت ونعلم أن التوابع المثلثية معرفة ومستمرة من أجل جميع قيم t أما المشتقات لهذه التوابع فهي:

$$\dot{x} = -a\sin(t)$$
$$\dot{y} = a\cos(t)$$
$$\dot{z} = b$$

وان هذه المشتقات أيضا توابع مثلثية معرفة ومستمرة وموجودة (أي قابلة للاشتقاق) إذا الشرط الأول محقق

لنرى الشرط الثالث:

من أجل قيمة معينة ل t تجعل المشتقات الثلاثة تنعدم معا ولا يمكن أن نجد هذه النقطة فالشرط الثالث محقق

أما بالنسبة للشرط الثاني فنجد أنه إذا أخذنا نقطتين مختلفتين ل tوطابقنا المركبات الثلاثة ولنبدأ بالمركبة z أي يجب أن نبدل كل t في z مرة ب t_1ومرة ب t_2 وكذلك بالنسبة لباقي المركبات فنجد:

وهي محققة $t_1 \neq t_2 \Longrightarrow bt_1 \neq bt_2$

بالنسبة ل x وy نجد: $t_1 \neq t_2 \Longrightarrow a\cos(t_1) \neq a\cos(t_2) \Longrightarrow \cos(t_1) \neq a\cos(t_2)$

عند النقطة $t = \frac{\pi}{4}$ نعوض في المعادلة ونجد:

$$t = \frac{\pi}{4} \begin{cases} x = \dfrac{a}{\sqrt{2}} \\ y = \dfrac{a}{\sqrt{2}} \\ z = b\dfrac{\pi}{4} \end{cases}$$

أما المشتقات فنجد:

$$t=\frac{\pi}{4}\begin{cases}\dot{x}=-\frac{a}{\sqrt{2}}\\ \dot{y}=\frac{a}{\sqrt{2}}\\ \dot{z}=b\end{cases}$$

لنكتب معادلات المستقيم المماس:

$$\frac{x-\frac{a}{\sqrt{2}}}{-\frac{a}{\sqrt{2}}}=\frac{y-\frac{a}{\sqrt{2}}}{\frac{a}{\sqrt{2}}}=\frac{z-b\frac{\pi}{4}}{b}$$

أما معادلة مستوي الناظم في:

$$-\frac{a}{\sqrt{2}}\left(x-\frac{a}{\sqrt{2}}\right)+\frac{a}{\sqrt{2}}\left(y-\frac{a}{\sqrt{2}}\right)+b\left(z-b\frac{\pi}{4}\right)=0$$

التكاملات الثنائية

أولا التكامل ديكارتيا:

في التكامل الديكارتي أهم خطوة في حل التمرين هي الرسم الصحيح لمنطقة التكامل و ذلك لتحديد منطقة الدخول و منطقة الخروج إضافة الى معرفة منطقة التكامل هل هي منطقة بسيطة أم غير بسيطة

كما أنه يجب معرفة أي من المتغيرين سوف نقوم بتثبيته وأيهما المتغير (وهو الذي يكون في التكامل الثاني والذي يكامل أول)

عندما تكون منطقة التكامل عبارة عن تقاطع منحنيين يجب إيجاد نقاط التقاطع اللازمة لحصر المنطقة المطلوبة

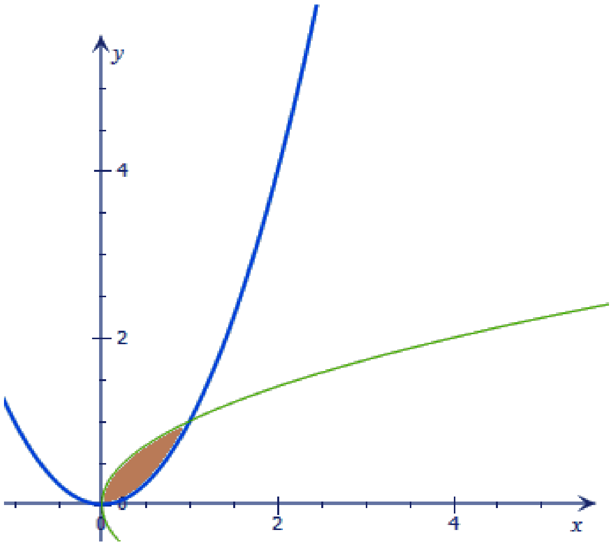
التمرين الأول:

احسب قيمة التكامل التالي:

$$I = \iint_D (y^2 + x)d(x)d(y)$$

حيث أن D هي المنطقة المحصورة بين القطعين المكافئين

$$y = x^2$$
$$y^2 = x$$



الحل:

نوجد نقط التقاطع بين القطعين عن طريق الحل المشترك

لهما فتكون النقطة الأولى $(0,0)$ والنقطة الثانية $(1,1)$

نثبت x بين 0 و 1 ويكون:

$$I=\int_0^1\left[\int_{y=x^2}^{y=\sqrt{x}}(y^2+x)d(y)\right]d(x)$$

$$I=\int_0^1\left[\frac{y^3}{3}+xy\right]_{x^2}^{\sqrt{x}}d(x)$$

$$I=\int_0^1\left[\frac{x^{\frac{2}{3}}}{3}+x^{\frac{2}{3}}-\left(\frac{X^6}{3}+X^3\right)\right]d(x)=\int_0^1\left(\frac{4}{3}x^{\frac{2}{3}}+x^{\frac{6}{3}}-x^3\right)d(x)$$

تتابع الحل لنحصل على المساحة المطلوبة وهي $I=\frac{33}{140}$

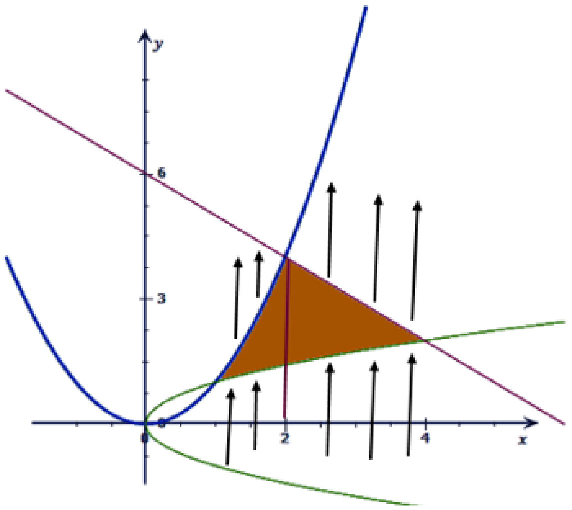
التمرين الثاني:

احسب مساحة المنطقة المحصورة بالمنحنيات التالية:

$$x+y=6$$
$$x=y^2$$
$$y=x^2$$

الحل:

علينا تقسيم المنطقة الى منطقتين حتى يصبح لدينا تكامل بسيط لذلك علينا إيجاد نقطة التقاطع بين القطع الأول مع المستقيم والقطع الثاني مع المستقيم



$$x+y=6$$
$$y=x^2$$

$$x^2+x-6=0\Rightarrow(x+3)(x-2)=0$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x=-3 & \text{ليست موجودة ضمن المساحة المطلوبة}\\ x=2 & \text{و هي المطلوبة}\end{cases}$$

$$x+y=6$$
$$y^2=x$$
$$y^2+y-6=0\Rightarrow(y+3)(y-2)=0$$

$$\Rightarrow\begin{cases}y=-3 & \text{ليست موجودة ضمن المساحة المطلوبة}\\ y=2 & \text{و هي المطلوبة}\end{cases}$$

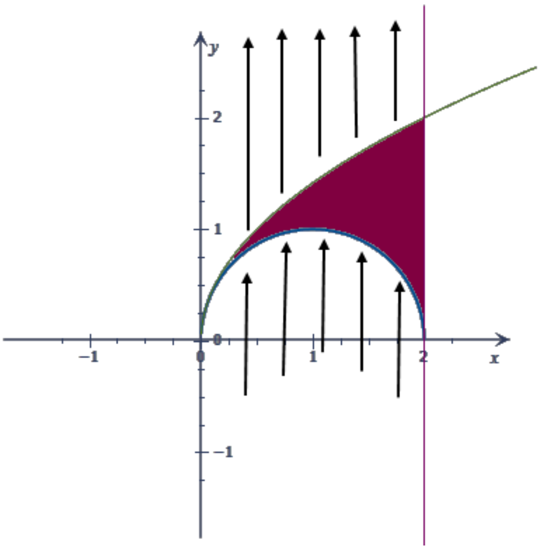
$$\Rightarrow x = 4$$

$$I_1 = \int_1^2 \left[\int_{y=x^2}^{y=\sqrt{x}} d(y)\right] d(x)$$

$$\int_1^2 (x^2 - \sqrt{x}) d(x)$$

$$I_1 = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_1^2 = \left(\frac{8}{3} - \frac{2}{3}\right) - \left(\frac{1}{3} - \frac{2}{3}\right)$$

$$I_1 = 2 + \frac{1}{3}$$



$$I_2 = \int_2^4 \left[\int_{y=\sqrt{x}}^{y=6-x} d(y)\right] d(x)$$

$$I_2 = \int_2^4 (6 - x - \sqrt{x}) d(x)$$

نتابع الحل فنجد $I_2 = \left[6x - \frac{x^2}{2} - \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_2^4$

$$\mathrm{I} = \mathrm{I}_1 + \mathrm{I}_2 = \frac{11}{3} - \frac{8}{3}\sqrt{2}$$

التمرين الثالث:

اكتب فقط حدود التكامل للتكامل الثنائي التالي

$$I = \iint_D f(x,y) d(x) d(y)$$

$$D = \begin{cases} y = \sqrt{2ax - x^2} \\ y = \sqrt{2ax} \\ y = 2a \end{cases}$$

نربع المعادلة الأولى فيكون:

$$y^2 + x^2 - 2ax = 0$$

نضيف ونطرح مربع نصف أمثال x: $y^2 + (x-a)^2 = a^2$

وهي عبارة عن معادلة دائرة نصف قطرها a ومركزها $(a,0)$

أما المعادلة الثانية فهي تعبر عن قطع زائد ومن هذا نجد أن:

$$I = \iint_D f(x,y)d(x)d(y)$$

$$I = \int_0^{2a} \left[\int_{y=\sqrt{2ax-x^2}}^{y=\sqrt{2ax}} f(x,y)d(y) \right] d(x)$$

ثانيا التكامل الوسيطي

نستخدم التكامل الوسيطي عندما يكون التكامل المعطى صعب المكاملة كبعض التكاملات الاسية و اللوغارتمية و المثلثية لذلك نلجأ له وهنا نعرف ما يسمى بالمحدد اليعقوبي وهو الطريقة للتحويلين من تكامل ديكارتي الى تكامل وسيطي و يجب من هذا التحويل أن نحصل على تكامل أبسط و سهل التعامل معه.

التمرين الرابع

أوجد قيمة التكامل التالي:

$$I = \iint_D \cos\left(\frac{x-y}{x+y}\right) d(x)d(y)$$

$$,D=\begin{cases}x+y=1\\x+y=e\\x=0\\y=0\end{cases}$$

$$u=x-y$$

علما أن التحويل هو :

$$v=x+y$$

لنوجد قيم x,y بدلالة u,v :

$$u=x-y\ \Rightarrow x=u+y$$
$$v=x+y\Rightarrow v=u+y+y$$
$$y=\frac{v-u}{2}$$
$$v=x+y\ \Rightarrow y=v-x$$
$$u=x-v+x\Rightarrow u=2x-v$$
$$x=\frac{v+u}{2}$$

لنوجد المجدد اليعقوبي:

$$J=\begin{vmatrix}\frac{d(x)}{d(u)} & \frac{d(x)}{d(v)}\\ \frac{d(y)}{d(u)} & \frac{d(y)}{d(v)}\end{vmatrix}$$

$$J=\begin{vmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{-1}{2} & \frac{1}{2}\end{vmatrix}=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}\Rightarrow |J|=\frac{1}{2}$$

لنوجد حدود التكامل:

من الواضح أن

$$v=x+y=1$$
$$v=x+y=e$$

إذا حدود v هي 1 و e

أما حدود التكامل الخاصة ب du نلاحظ أننا يجب أن نأخذ حدودها من المعادلتين الباقيتين $x=0$

$$y=0$$

وقد قمنا سابقا بإيجاد كل من x,y بدلالة u,v أي أن:

$$x = \frac{v+u}{2} = 0 \Rightarrow v+u = 0$$

و هو الحد الأول من حدود التكامل $u = -v$

$$y = \frac{v-u}{2} = 0 \Rightarrow v-u = 0 \Rightarrow$$

و هو الحد الثاني من حدود التكامل $v = u$

نعوض المعطيات بالتكامل الأصلي :

$$I = \iint_{D_1} cos\left(\frac{u}{v}\right)\left(\frac{1}{2}\right) d(v)d(u)$$

$$D_1 \begin{cases} v = 1 \\ v = e \\ u = -v \\ u = v \end{cases}$$

$$I = \frac{1}{2}\int_1^e \left[\int_{-v}^{v} cos\left(\frac{u}{v}\right)\left(\frac{1}{2}\right) d(u)\right] d(v)$$

$$I = \frac{1}{2}\int_1^e \left[v\,Sin\left(\frac{u}{v}\right)\right]_{-v}^{v} d(v)$$

$$I = \frac{1}{2}\int_1^e \big(vSin(1) - vSin(-1)\big)d(v)$$

و لكن نعلم أن : $Sin(\theta) = -Sin(-\theta)$

نعوض:

$$I = \frac{1}{2}\int_1^e \big(vSin(1) + vSin(1)\big)d(v)$$

$$I = \frac{1}{2}\int_1^e 2vSin(1)\,d(v) = \int_1^e vSin(1)\,d(v) = Sin(1)\int_1^e vd(v)$$

$$I = Sin(1)[v^2]_1^e = Sin(1)\left(\frac{e^2}{2} - \frac{1}{2}\right)$$

$$\mathrm{I} = \frac{1}{2}(e^2 - 1)Sin(1)$$

التمرين الخامس:

باستخدام التحويل التالي $v = xy$, $u = \frac{y}{x^2}$

احسب مساحة المنطقة المحددة بالمنحنيات التالية: $y = ax^2 \quad , y = bx^2 \quad ; b > a > 0$

$xy = p \quad , \quad xy = q \quad ; q > p > 0$

الحل:

لنفرض : $u = \frac{y}{x^2} \to y = x^2 u$; $v = xy \to x = \frac{v}{y}$

$$u = y.\frac{y^2}{v^2} = \frac{y^3}{v^2} \to$$
$$y = u^{\frac{1}{3}}.v^{\frac{2}{3}}$$
$$x^3.u = v$$
$$x^3 = \frac{v}{u} \to x = v^{\frac{1}{3}}.u^{-\frac{1}{3}}$$
$$J = \begin{vmatrix} -\frac{1}{3}v^{\frac{1}{3}}.u^{-\frac{4}{3}} & \frac{1}{3}u^{\frac{-2}{3}}.v^{\frac{2}{3}} \\ \frac{1}{3}v^{\frac{-2}{3}}.u^{-\frac{1}{3}} & \frac{2}{3}u^{\frac{1}{3}}.v^{\frac{-1}{3}} \end{vmatrix}$$
$$J = -\frac{2}{9}(u)^{-1} - \frac{1}{9}(u)^{-1} \to |J| = \frac{1}{3}u^{-1}$$
$$I = \frac{1}{3}\int_a^b \int_p^q u^{-1}d(u)d(v) = \frac{1}{3}\int_a^b [\ln(u)]_p^q d(v)$$
$$I = \frac{1}{3}(\ln(q) - \ln(p))(b - a) = \frac{(b-a)}{3}\ln(\frac{q}{p})$$

ثالثا التكامل قطبيا:

نستخدم هذا التكامل عندما تكون منطقة التكامل عبارة عن دائرة أو مايشبهها حيث عند التحويل التكامل الى قطبي يجب ألا ننسى ضرب التكامل ب r و الذي هو يمثل قيمة المحدد اليعقوبي ونكامل بالنسبة لنصف القطر و من ثم نكامل بالنسبة للزاوية

التمرين السادس (هام جدا)

$$I = \iint_D \sqrt{4 - X^2 - Y^2}\, d(x)d(y)$$

حيث أن D عبارة عن المنطقة المحاطة بين:

$$y = 0$$
$$y = \sqrt{2x - x^2}$$

الحل:

$$y^2 = 2x - x^2$$
$$y^2 + (x-1)^2 = 1$$

وهي تمثل معادلة دائرة

لنوجد حدود r ان : $y^2 + x^2 = 2x \Longrightarrow r^2 = 2x = 2rCOS(\theta)$

اما $r = 0$

أو $r = 2COS\,(\theta)$

لحساب حدود نكتب $y = 0$

و نعلم أن $y = rSin(\theta)$

و ان $r = 2COS\,(\theta)$ نعوض فنجد

$$2COS\,(\theta)Sin(\theta) = 0$$

و نعلم أن : $2COS\,(\theta)Sin(\theta) = Sin(2\theta)$

اذا أصبحت $Sin(2\theta) = 0 \Longrightarrow \begin{cases} 2\theta = 0 \Longrightarrow \theta = 0 \\ 2\theta = \pi \Longrightarrow \theta = \frac{\pi}{2} \end{cases}$

و بذلك نكون قد أوجدنا حدود التكامل و الان لنعوض المعطيات التي أوجدناها بما يقابلها في التكامل فيكون

$$I=\frac{1}{2}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\left[-\frac{1}{3}(4-r^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^{2COS(\theta)}d(\theta)$$

$$I=-\frac{1}{3}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}[4(1-COS^2(\theta)]^{\frac{3}{2}}-(4)^{\frac{3}{2}}d(\theta)$$

$$I=-\frac{1}{3}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}(8Sin^3(\theta)-8)d(\theta)$$

$$I=-\frac{8}{3}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}(Sin^3(\theta)-1)d(\theta)$$

$$I=-\frac{8}{3}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}(Sin(\theta)(1-COS^2(\theta)-1)d(\theta)$$

$$I=-\frac{8}{3}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}((Sin(\theta)-Sin(\theta)COS^2(\theta)-1)d(\theta)$$

$$I=-\frac{8}{3}\left[-cos(\theta)+\frac{1}{3}cos^3(\theta)-\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$I=-\frac{8}{3}\{0+0-\frac{\pi}{2}-\left(-1+\frac{1}{3}-0\right)\}$$

$$I=-\frac{8}{3}\left(-\frac{\pi}{2}+\frac{2}{3}\right)=\frac{8}{6}\pi-\frac{16}{9}$$

رابعا : التكامل الشاذ

ونقصد بالتكامل الشاذ وهو أن يكون التابع البمكامل عليه غير معرف عند منطقة معينة فإذا كانت هذه المنطقة أو النقطة ضمن مساحة التكامل وجب حساب التكامل بقرب هذه النقطة و ليس عندها ولذلك نلجأ الى مفهوم النهاية عند النقطة او المنطقة الشاذة

من الممكن أن تكون المنطقة الشاذة عبارة عن نقطة وحيدة أو يمكن أن تكون عبارة عن مستقيم

وهنالك حالة أخرى بأن تكون المنطقة المكامل عليها غير محدودة أي تسعى للانهاية

وفي كلا الحالتين نستخدم مفهوم النهاية فإذا كان التابع شاذ على منطقة محددة فقط نجعل نكامل و ننهي التابع الى جوار القيمة الشاذة أي الى δ_nو اذا كانت المنطقة مفتوحة نكامل و نجعل قيمة التكامل تسعى نحو اللانهاية

_في حال المكاملة قطبيا دائما يكون δ_n عند المكاملة بالنسبة ل r أما في باقي أنواع التكامل (ديكارتي ,وسيطي) فلنا حرية الاختيار

_عند المكاملة قطبيا فاننا نحيط النقطة الشاذة بدائرة نصف قطرها δ_n أما التكامل ديكارتيا فاننا نحيطها بمربع صغير δ_n

_ في حال كانت قيمة التكامل النهائية (بعد حساب النهاية) قيمة عددية نقول بأن التكامل متقارب أما اذا كانت القيمة هي لانهاية فعندها نقول بأن التكامل متباعد و من المهم جدا ذكر ذلك عند الجواب النهائي +_+

_ في التكامل ديكارتيا نقوم بالتثبيت عند δ_n سواء كان في التكامل الأول أو الثاني (أي يجب أن تكون الδ_n في التكامل الخارجي (الذي يكامل بعد))

التمرين السابع

احسب قيمة التكامل :

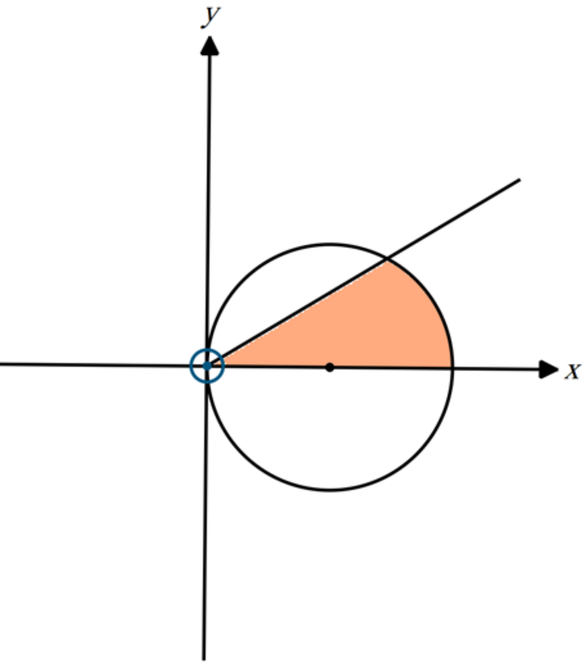
$$I=\iint \frac{1}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}}d(x)d(y)$$

حيث ان D هي المنطقة المحصورة بالمنحنيات التالية:

$$x=y \quad ,y=0 \quad ,y=(-x^2+2x)^{\frac{1}{2}}$$

الحل:

$$0\le\theta\le\frac{\pi}{4}$$
$$\delta_n\le r\le 2COS(\theta)$$
$$I=\lim_{(\delta_n\to 0)}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_{\delta_n}^{2COS(\theta)} d(r)d(\theta)$$



$$I=\lim_{(\delta_n\to 0)}\int_0^{\frac{\pi}{4}}(2COS(\theta)-\delta_n)d(\theta)$$
$$=\lim_{(\delta_n\to 0)}(2Sin(\theta)-\theta\delta_n)_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$I=\lim_{(\delta_n\to 0)}\left(\frac{2\sqrt{2}}{2}-\frac{\pi}{4}\delta_n-0\right)=\sqrt{2}\to$$ فالتكامل متقارب

التمرين الثامن (هام جدا سؤال مكرر)

$$I=\iint_D \frac{d(x)d(y)}{(x^2+y^2+1)^{\frac{5}{2}}}$$

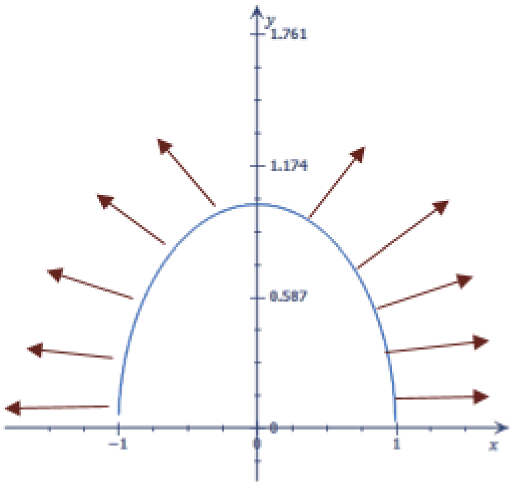
$$D\equiv\{(x,y)\};y\geq 0$$

الحل

إن التكامل المعطى شاذ لأن المنطقة غير محددة فهي تمثل جميع النقاط الواقعة في القسم العلوي من المستوي ويمكن حل هذا التكامل ديكارتيا أو قطبيا وسنلجأ الى الحل الأسهل وهو القطبي لذلك نأخذ نطاق نصف دائري:

$$I=\lim_{\delta N\to\infty}\int_0^{\pi}\left[\int_{r=0}^{r=\delta N}\frac{rd(r)}{(r^2+1)^{\frac{5}{2}}}\right]d(\theta)$$

$$I=\lim_{\delta N\to\infty}\int_0^{\pi}\left[-\frac{1}{2}\frac{2}{3(r^2+1)^{\frac{3}{2}}}\right]_0^{\delta N}d(\theta)$$



$$I=-\frac{1}{3}\lim_{\delta N\to\infty}\int_0^{2\pi}\frac{1}{(\delta N^2+1)^{\frac{3}{2}}}-1\,d(\theta)$$

$$I=-\frac{1}{3}(\lim_{\delta N\to\infty}\frac{1}{(\delta N^2+1)^{\frac{3}{2}}}-1)[\theta]_0^{\pi}=$$

$$-\frac{\pi}{3}(\lim_{\delta N\to\infty}\frac{1}{(\delta N^2+1)^{\frac{3}{2}}}-1)$$

$$I=-\frac{\pi}{3}(0-1)\approx\frac{\pi}{3}$$ **فالتكامل متقارب**

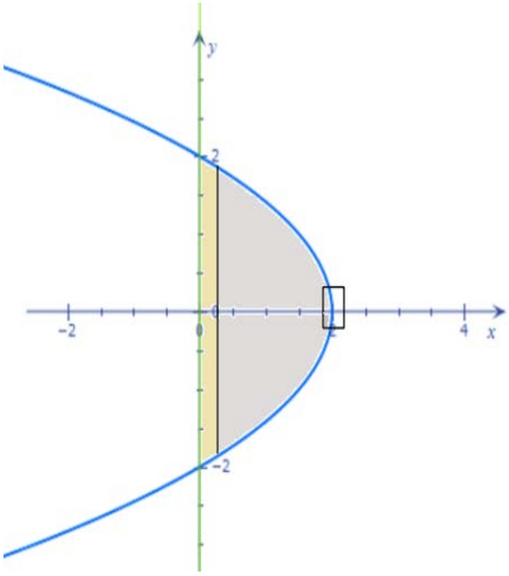
التمرين التاسع (هام كأفكار)

أوجد قيمة التكامل التالي: $I = \iint_D \frac{d(x)d(y)}{\sqrt{2x-x^2}}$

$$D = \begin{cases} x = 0 \\ y^2 = 4-2x \end{cases}$$

الحل

إن التابع المكامل يعاني من انقطاع عندما $x = 0$ أي أن جميع نقاط المستقيم تمثل نقاط شاذة و بالتالي نأخذ شريط على طول OY يبتعد عنه باتجاه اليميني بمقدار δN عندها نثبت x بين 2 و δN_1 و نغير ال y بين الجزء السفلي للقطع و بين الجزء العلوي منه أو إما بطريقة أخرى يمكن أن نغير y بين $y = 0$ و الجزء العلوي منه ومن ثم نضرب ب 2 حيث ان المنحني متناظر ولكن نلاحظ أيضا أن الدالة غير معرفة أيضا عند النقطة 2 و هذه النقطة ضمن مجال المكاملة و بالتالي هذه النقطة أيضا شاذة لذلك نحيط النقطة $(0,2)$ بمربع نصف قطره δN_2 و بالنهاية نجد أننا ثبتنا الX بين ال δN_1 و δN_2 و نغير y بين $y = 0$ و $y = +\sqrt{4-2x}$:



$$I_1 = \lim_{\substack{\delta N_1 \to 0 \\ \delta N_2 \to 2}} \int_{\delta N_1}^{\delta N_2} \left[\int_0^{\sqrt{4-2x}} \frac{d(y)}{\sqrt{2x-x^2}} \right] d(x)$$

$$I_1 = \lim_{\substack{\delta N_1 \to 0 \\ \delta N_2 \to 2}} \int_{\delta N_1}^{\delta N_2} \frac{1}{\sqrt{2x-x^2}} [y]_0^{\sqrt{4-2x}} \; d(x)$$

$$I_1 = \lim_{\substack{\delta N_1 \to 0 \\ \delta N_2 \to 2}} \int_{\delta N_1}^{\delta N_2} \frac{\sqrt{2}\sqrt{2-x}}{\sqrt{x}\sqrt{2-x}} \; d(x) = \lim_{\substack{\delta N_1 \to 0 \\ \delta N_2 \to 2}} 2\sqrt{2}\left[\sqrt{x}\right]_{\delta N1}^{\delta N_2}$$

$$I_1 = \lim_{\substack{\delta N_1 \to 0 \\ \delta N_2 \to 2}} 2\sqrt{2}\left[\sqrt{\delta N_2} - \sqrt{\delta N_1}\right] = 2\sqrt{2}\left(\sqrt{2} - 0\right) \approx 4$$

فالتكامل متقارب $I = 2I_1 \approx 8$

التمرين العاشر

احسب قيمة التكامل

$$I = \iint \sqrt{4 - \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9}}\, d(x)d(y)$$

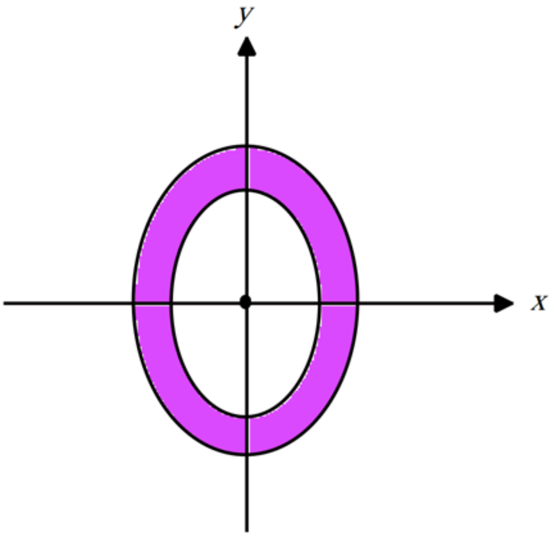
حيث أن منطقة التكامل هي المنطقة المحصورة بين:

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1 \qquad , \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{36} = 1$$

الحل :

لننتقل الى الاحداثيات الوسيطية أي نفرض:

$$u = \frac{x}{2}$$
$$v = \frac{y}{3}$$



نعوض في منطقة التكامل فنحصل على :

$$u^2 + v^2 = 1$$
$$u^2 + v^2 = 4$$

وهما تمثلان معادلتي دائرة نصف قطر الأولى واحد و الأخر 2

لنوجد المحدد اليعقوبي :

$$J = \begin{vmatrix} \frac{d(x)}{d(u)} & \frac{d(x)}{d(v)} \\ \frac{d(y)}{d(u)} & \frac{d(y)}{d(v)} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 6$$

$$I = \iint 6\sqrt{4 - u^2 - v^2}\, d(u)d(v)$$

إذا لننتقل الى الاحداثيات القطبية حيث أن الدائرتين مركزيات اذا :

$$0 \leq \theta \leq 2\pi$$
$$1 \leq r \leq 2$$

$$I = \iint 6r\sqrt{4-r^2}d(r)d(\theta)$$

$$I = \int_0^{2\pi}\int_1^2 6r\sqrt{4-r^2}d(r)d(\theta) = -3\int_0^{2\pi}\int_1^2 -2r\sqrt{4-r^2}d(r)d(\theta)$$

$$I = -3\int_0^{2\pi}[\frac{2}{3}(4-r^2)^{\frac{3}{2}}]_1^2 = -2(2\pi)(-\frac{2}{3}.(3)^{\frac{3}{2}})$$

$$I = 8\sqrt{3}\,\pi$$

التكامل الثلاثي :

هو تكامل تابع لثلاثة متحولات **x,y,z** على منطقة فراغية **v**

$$I = \iiint_v F(X,Y,Z)dx\,dy\,dz$$

وذلك بشرط أن تكون المنطقة **v** محاطة بسطح صقيل وأن يكون التابع معرف ومستمر على المنطقة **v** وإلا فإن التكامل الثلاثي يكون شاذ

التكامل الثلاثي بالإحداثيات الديكارتية:

يمكن أن نكامل أولا بلنسبة ل **Z** ثم نسقط السطح على **XOY** فيتحول التكامل إلى تكامل ثنائي

عند الانتهاء من المكاملة بلنسبة ل **Z** قد نستخدم الاحداثيات القطبية لحل التكامل الناتج ونستخدم عندئذ التحويلات التالية:

$$X = r\cos\theta$$

$$Y = r\sin\theta$$

التكامل الثلاثي بالإحداثيات الكروية:

نبدل معادلات السطوح المعطات بلشكل الديكارتي بالتبديل الكروي :

$$x = r\sin\theta\cos\varphi$$
$$y = r\sin\theta\sin\varphi$$
$$z = r\cos\theta$$
$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$
$$dx\,dy\,dz \Rightarrow \quad r^2\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\varphi$$

الكرة مركزية:

$$I = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} \sin\theta\,d\theta \int_0^{r} f(r,\theta,\phi) r^2\,dr$$

الكرة على z :

$$\phi: 0 \to 2\pi \;\Big|\; \theta: 0 \to \frac{\pi}{2} \;\Big|\; r: 0 \to \cos\theta$$

الكرة على y:

$$\phi: 0 \to \pi \;|\; \theta: 0 \to \pi$$

أشكال ومعادلات السطوح

مجسم القطع المكافئ الناقصي $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = y$$

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = x$$

مجسم القطع المكافئ الدوراني $x^2 + y^2 = z$

$$x^2 + z^2 = y$$

$$y^2 + z^2 = x$$

المخروط $x^2 + y^2 = \tan^2\alpha\, z^2$

الاسطوانة $x^2 + y^2 = a^2$

$$x^2 + z^2 = a^2$$

$$y^2 + z^2 = a^2$$

الاسطوانة المكافئية $z^2 = x$

$$x^2 = z$$

$$y^2 = z$$

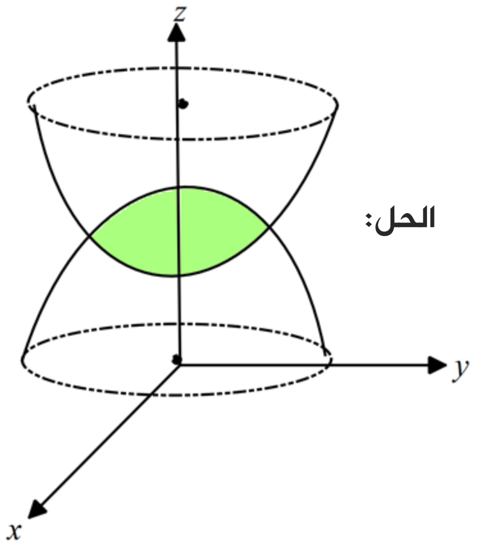
التمرين الأول

$$I = \iiint X^2 Z \; dx\, dy\, dz$$

$$z = 4 - (x^2 + y^2)$$

$$z = 2 + (x^2 + y^2)$$

الحل:



$$z - 4 = -(x^2 + y^2)$$

$$z - 2 = +(x^2 + y^2)$$

$$I = \iint \left[\frac{x^2 z^2}{2}\right]_{2+(x^2+y^2)}^{4-(x^2+y^2)} dx\, dy$$

$$\iint \frac{x^2}{2}\left[\left(4 - (x^2 + y^2)\right)^2 - \left(2 + (x^2 + y^2)\right)^2\right] dx\, dy$$

بالإسقاط على xoy

$$I = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2} r^2 \cos^2\theta \, [(4 - r^2)^2 - (2 + r^2)^2] r\, dr\, d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2} r^3 COS^2(\theta)[16 - 8r^2 + r^4 - 4 - 4r^2 - r^4] d(r) d(\theta)$$

$$I = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2} COS^2(\theta)[12r^3 - 4r^5]d(r)d(\theta)$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} COS^2(\theta)\left[2r^4 - \frac{2}{3}r^6\right]_0^2 d(\theta)$$

$$\frac{8}{3}\int_0^{2\pi} COS^2(\theta)\, d(\theta)$$

$$\frac{8}{3}\int_0^{2\pi} \frac{1+cos2\theta}{2} d(\theta)$$

$$\frac{8}{3}\left[\frac{1}{2}\theta + \frac{sin2\theta}{4}\right]_0^{2\pi} = \frac{8}{3}[\pi - 0] = \frac{8\pi}{3}$$

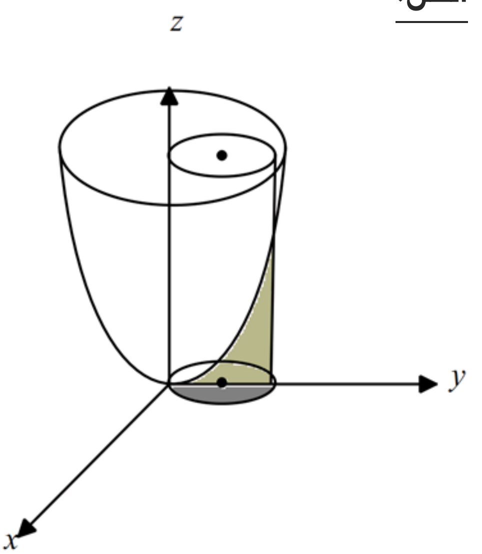
التمرين الثاني

$$I = \iiint_V 27\, y\, z^2\, d(x)d(y)d(z)$$

و للمنحني المحصور بين :

$$z = 0$$
$$z = x^2 + y^2$$

الحل:



$$x^2(y-1)^2 = 1$$

$$I = \iint\int_0^{x^2+y^2} [27\, y\, z^3]d(z)d(x)d(y)$$

$$\iint [9\, y\, z^3]_0^{x^2+y^2} d(x)d(y)$$

$$\int\int [9y\,(x^2+y^2)^3]\, d(x)d(y)$$

نسقط على **xoy**

$$x^2+(y-1)^2=1 \to x^2+y^2-2y+1=1 \to x^2+y^2=2y$$

$$r^2=2\,r\sin\theta \to r:0\to 2sin\theta$$
$$\theta:0\to\pi$$

$$I=9\int_0^{\pi}\int_0^{2sin\theta} r\sin\theta\,(r^6)\;r\,dr\,d\theta$$

$$I=\int_0^{\pi}[r^9]_0^{2sin\theta}.\sin\theta\,d\theta=\int_0^{\pi}2^9 sin^{10}\theta\,d\theta$$

$$I_1=2\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^{10}\theta\,d\theta=2\times\frac{\pi}{2}\times\frac{9\times7\times5\times3\times1}{10\times8\times6\times4\times2}=0.24\pi$$

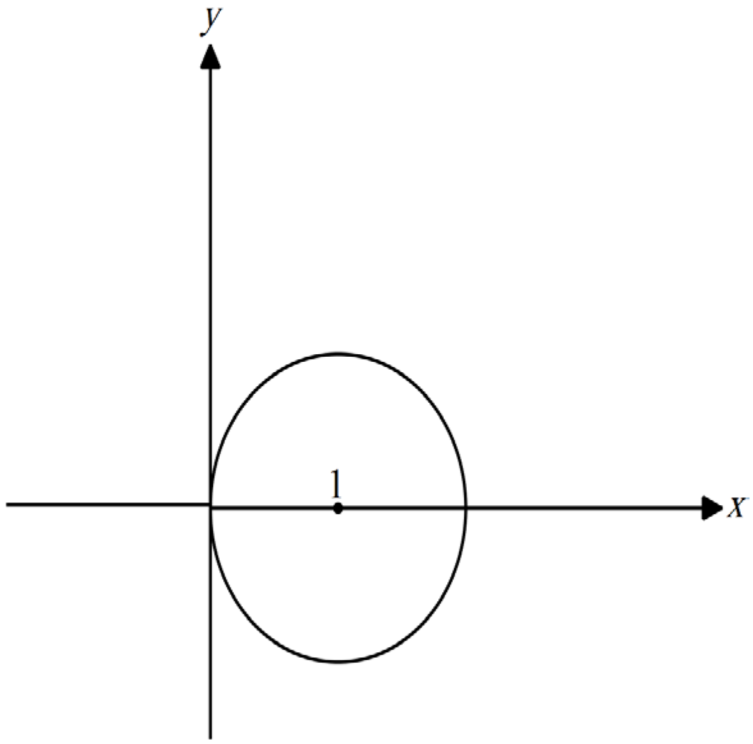
$$I=2^9.0.24\pi=126\pi$$

التمرين الثالث:

$$I=\iiint z\sqrt{x^2+y^2}\,d(x)d(y)d(z)$$

$$v\equiv\begin{cases} y=0\\ z=0\\ z=3\\ x^2+y^2=2x\end{cases}$$

$$x^2+2x+y^2=0\to x^2+2x+1+y^2=1$$
$$(x-1)^2+y^2=1$$
$$I=\iint\left[\int_0^3 z\sqrt{x^2+y^2}\,d(z)\right]d(x)d(y)$$

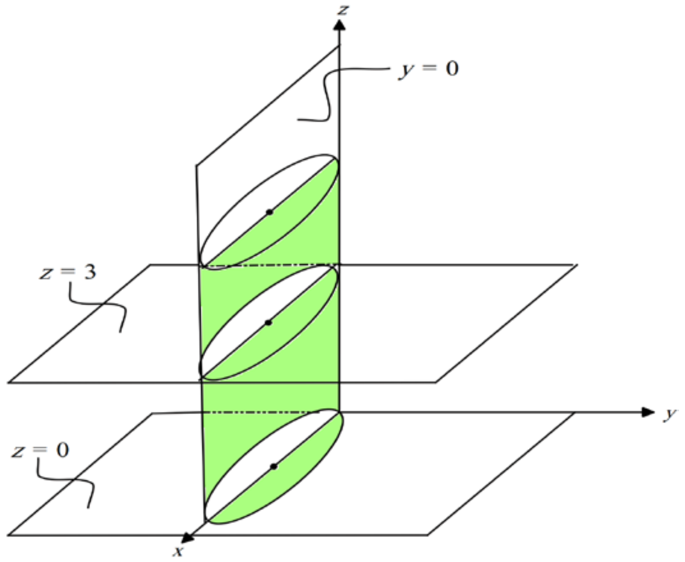


$$I = \iint \left[\sqrt{x^2+y^2}\right]\left[\frac{z^2}{2}\right]_0^2 d(x)d(y)$$

$$I = \frac{9}{2}\iint \left[\sqrt{x^2+y^2}\right] d(x)d(y)$$

لننتقل للاحداثيات القطبية:

$$0 \le \theta \le \pi$$
$$0 \le r \le 2COS(\theta)$$



$$I=\frac{9}{2}\int_{0}^{\pi}\int_{0}^{2COS(\theta)} r^2 d(r)d(\theta)=\frac{3}{2}\int_{0}^{\pi}\left[\frac{r^3}{3}\right]_0^{2COS(\theta)} d(\theta)$$

$$I=\frac{3}{2}\int_{0}^{\pi} 8COS^3(\theta)d(\theta)=12\int_{0}^{\pi} COS^3(\theta)d(\theta)$$

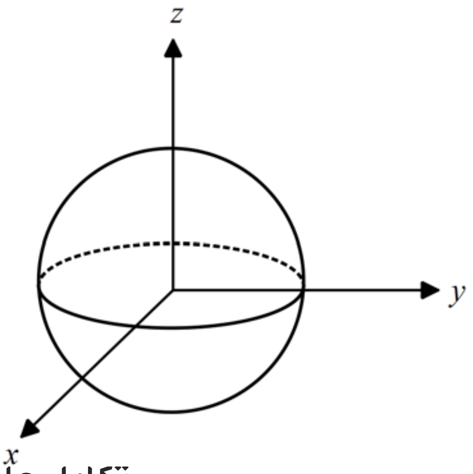
$$I_1=2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} COS^3(\theta)d(\theta)=2\times\frac{2}{3!!}=\frac{4}{3}$$

$$I=12\times\frac{4}{3}=16$$

التمرين الرابع

$$I=\iiint_R \frac{dxdydz}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$R\equiv x^2+y^2+z^2\geq 1$$



الحل:

تكامل على منطقة غير محدودة وغير مستمرة فهو تكامل شاذ

$$r:1\to d$$

$$\theta:0\to\pi$$

$$\varphi:0\to 2\pi$$

$$I=lim_{d\to\infty}\int_{0}^{2\pi} d\varphi\int_{0}^{\pi} sin\theta d\theta\int_{1}^{d}\frac{1}{r}dr=lim_{d\to\infty}\int_{0}^{2\pi} d\varphi\int_{0}^{\pi} sin\theta d\theta[lnr]_1^d=\infty$$

فالتكامل متباعد

التمرين الخامس:

$$I = \iiint zdxdydz$$

حيث أن منطقة التكامل تعطى:

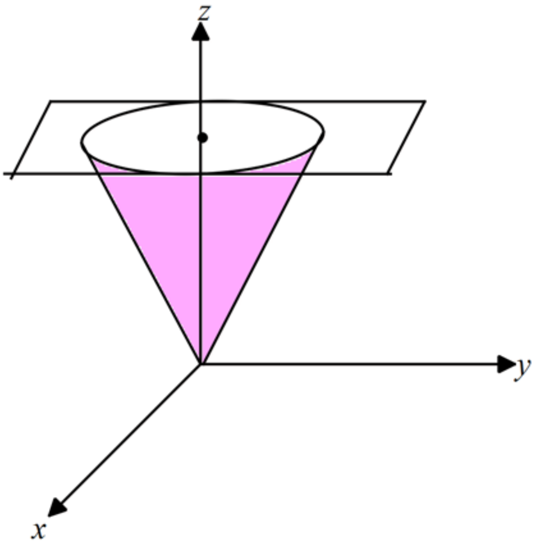
$$z = h \quad , z = \frac{h}{R}\sqrt{x^2 + y^2}$$

الحل:

$\frac{R^2}{h^2} z^2 = x^2 + y^2$ معادلة مخروط

$$I = \iint \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{h} \frac{z^2}{2} dxdydz$$

$$= \frac{1}{2} \iint h^2 - \frac{h^2}{R^2} x^2 + y^2 dxdy$$



بالإسقاط على **xoy**:

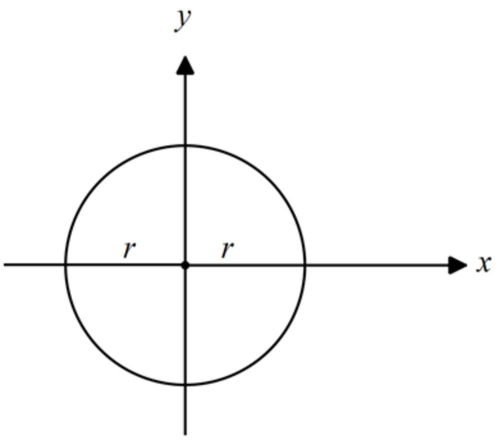
$$z = h \to x^2 + y^2 = R^2$$

$$r: 0 \to R$$

$$\theta: 0 \to 2\pi$$

$$I = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^{R} \left[h^2 - \frac{h^2 r^2}{R^2}\right] r dr d\theta$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^{R} h^2 r - \frac{h^2}{R^2} r^3 dr d\theta$$



$$= \frac{1}{2}\int_{0}^{2\pi}\left[\frac{h^2r^2}{2} - \frac{h^2r^4}{R^2 4}\right]_0^R drd\theta$$

$$I = \frac{h^2R^2}{4}\pi$$

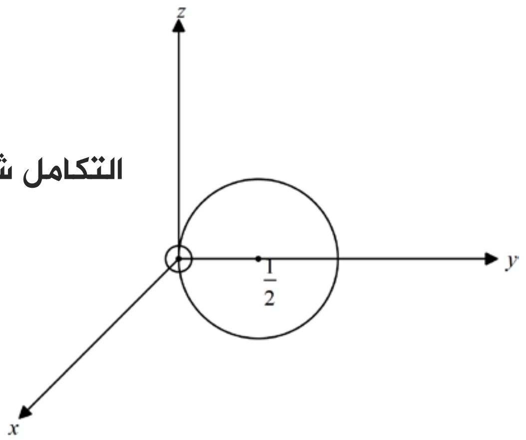
التمرين السادس:

$$I = \iiint \frac{d(x)d(y)d(z)}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

$$V \equiv x^2 + y^2 + z^2 \leq y$$

الحل:

التكامل شاذ من النوع الأول بسبب انقطاعه عند المبدأ



$$x^2 + y^2 + z^2 = y$$
$$x^2 + y^2 - y + z^2 = 0$$
$$x^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 + z^2 = \frac{1}{4}$$

$$r^2 = y \rightarrow r^2 = rSin(\theta)Sin(\varphi) \rightarrow 0 \leq r \leq Sin(\theta)Sin(\varphi)$$

$$0 \leq \theta \leq \pi$$
$$0 \leq \varphi \leq \pi$$

$$I = lim_{\delta\to 0}\int_0^{\pi} d(\varphi)\int_0^{\pi} Sin(\theta)d(\theta)\int_0^{Sin(\theta)Sin(\varphi)} rd(r)$$

$$I = lim_{\delta\to 0}\int_0^{\pi} d(\varphi)\int_0^{\pi} Sin(\theta)d(\theta)\left[\frac{r^2}{2}\right]_0^{Sin(\theta)Sin(\varphi)}$$

$$= lim_{\delta\to 0}\int_0^{\pi} d(\varphi)\int_0^{\pi} Sin(\theta)d(\theta)\frac{1}{2}Sin^2(\theta)Sin^2(\varphi)$$

$$I = \frac{1}{2}lim_{\delta\to 0}\int_0^{\pi} Sin^2(\varphi)d(\varphi)\int_0^{\pi} Sin^3(\theta)d(\theta)$$

$$I_1=\int_0^{\pi}Sin^3(\theta)d(\theta)=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}Sin^3(\theta)d(\theta)=\frac{4}{3}$$

$$I=\frac{2}{3}\int_0^{\pi}Sin^2(\varphi)d(\varphi)=\frac{2}{3}\int_0^{\pi}\frac{1-COS(2\varphi)}{2}d(\varphi)=\frac{2}{3}\left[\frac{1}{2}\varphi-\frac{Sin(2\varphi)}{2}\right]_0^{\pi}$$

$$I=\frac{2}{3}\left[\frac{\pi}{2}\right]=\frac{\pi}{3}$$

التمرين السابع

$$I=\iiint(x^2+y^2)dxdydz$$

$$V\equiv\begin{cases}z=0\\x^2+y^2=2x\\z=\sqrt{4x}\end{cases}$$

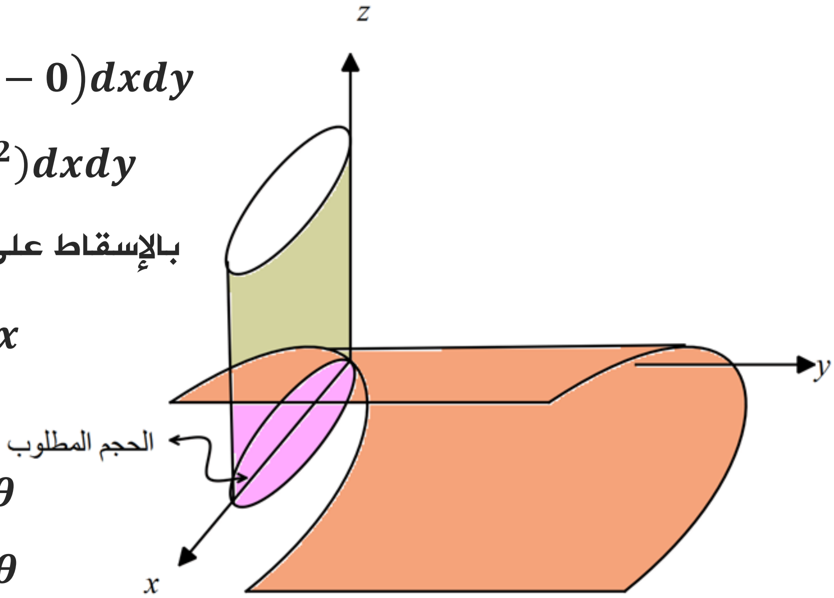
$$x^2+y^2=2x\rightarrow(x-1)^2+y^2=1$$

$$z^2=4x$$

$$I=\iint\int_{z=0}^{z=2\sqrt{x}}x^2+y^2dxdydz$$

$$I=\iint(x^2+y^2)\left(2\sqrt{x}-0\right)dxdy$$

$$I=\iint 2\sqrt{x}(x^2+y^2)dxdy$$



بالإسقاط على xoy:

$$x^2+y^2=2x$$

$$r^2=2rcos\theta$$

$$r:0\rightarrow 2cos\theta$$

$$\theta:0\rightarrow\pi$$

$$I = \int_0^{\pi}\int_0^{2cos\theta} 2\sqrt{rcos\theta}(r^2)rdrd\theta$$

$$= \int_0^{\pi}\int_0^{2cos\theta} 2r^3\sqrt{rcos\theta}drd\theta$$

$$= \int_0^{\pi}\int_0^{2cos} 2r^3r^{\frac{1}{2}}\sqrt{cos\theta}drd\theta$$

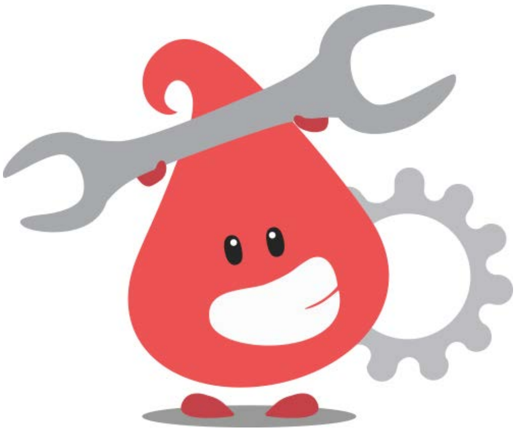
$$= \int_0^{\pi}\int_0^{2cos\theta} 2\sqrt{cos\theta}r^{\frac{3}{2}}drd\theta$$

$$= \int_0^{\pi} 2\sqrt{cos\theta}\left[\frac{r^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}\right]_0^{2cos\theta} d\theta$$

$$= \frac{4}{5}\int_0^{\pi}\sqrt{cos\theta}(2cos\theta)^{\frac{5}{2}}d\theta$$

$$= \frac{4}{5}\int_0^{\pi} 2^{\frac{5}{2}}(cos\theta)^{\frac{6}{2}}d\theta = \frac{16\sqrt{2}}{5}\int_0^{\pi} cos^3\theta = \frac{64\sqrt{2}}{5}$$

$$2\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^3\theta d\theta = 2\left(\frac{2!!}{3!!}\right) = \frac{4}{3}$$



التكاملات السطحية

هنا الهدف حساب مساحة سطح فراغي

عند حل التمرين علينا ان نركز بكيفية تحويل التكامل السطحي الى تكامل ثنائي نتمكن بحله و للانتقال الى التكامل الثنائي نجري التحويل التالي:

$$dS \to \mu\, d(x)d(y)$$

حيث أن μ ناتجة عن اشتقاق السطح و الذي يكون بالشكل $z = f(x,y)$ بالنسبة ل **x,y** و تعطى بالعلاقة:

$$\mu = \sqrt{{z'_x}^2 + {z'_y}^2 + 1}$$

كما أننا يجب أن ننتبه أنه عند تحويل التكامل الى ثنائي يتوجب أن يكون التكامل بالنسبة ل **x,y** فقط و اذا احتوت المعادلة على **z** فاننا نعوض بقيمتها (التي تمثل السطح المعطى) في التكامل

نقوم بحساب هذا التكامل اذا كان السؤال احسب مساحة السطح أو جزء من السطح

التمرين الأول

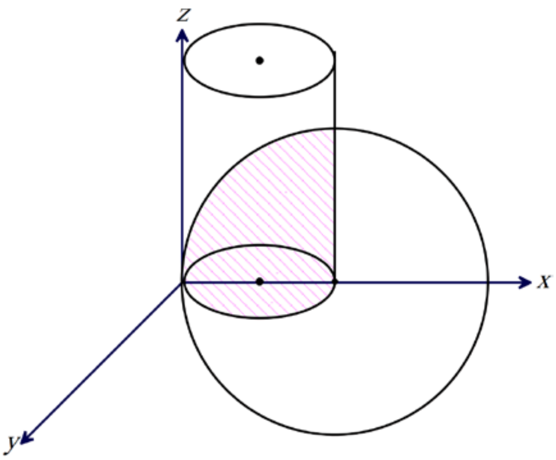
احسب مساحة جزء من السطح

$$z = \sqrt{4 - (x^2 + y^2)}$$

و المقطوع بالاسطوانة

$$x^2 + y^2 = 2x$$

الحل:



$$z'_x = -\frac{x}{\sqrt{4 - (x^2 + y^2)}}$$

$$z'_y = -\frac{y}{\sqrt{4 - (x^2 + y^2)}}$$

$$\mu = \sqrt{{z'_x}^2 + {z'_y}^2 + 1}$$

$$\mu=\sqrt{\frac{(x^2+y^2)}{4-(x^2+y^2)}+1}=\sqrt{\frac{(x^2+y^2)+4-(x^2+y^2)}{4-(x^2+y^2)}}=\frac{2}{\sqrt{4-(x^2+y^2)}}$$

$$I=\iint\frac{2}{\sqrt{4-(x^2+y^2)}}\mathrm{d(x)d(y)}$$

لننتقل الى الاحداثيات القطبية

حيث أن مسقط الشكل على المستوي xoy هو عبارة عن دائرة

ملاحظة☹في الرسم غيرنا بين الاحداثيين x وy و ذلك ليسهل علينا فهم الرسمة

لنوجد احداثيات نصف القطر من معادلة الأسطوانة: $x^2+y^2=2x$

$$r^2=2rCOS(\theta)\rightarrow 0\le r\le 2COS(\theta)$$

$$\frac{\pi}{2}\le\theta\le-\frac{\pi}{2}$$

$$I=-\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2COS(\theta)}\frac{-2r}{\sqrt{4-r^2}}d(r)d(\theta)$$

$$I=-2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left[\sqrt{4-r^2}\right]_0^{2COS(\theta)}d(\theta)$$

$$I=-2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{4-4COS^2(\theta)}-2d(\theta)=-4\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\sqrt{1-COS^2(\theta)}-1\right)d(\theta)$$

$$I=-4\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(Sin(\theta)-1)d(\theta)=-4[COS(\theta)-\theta]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=-4\left(0-\frac{\pi}{2}-0-\frac{\pi}{2}\right)$$

$$I=\frac{4\pi}{4}=\pi$$

التمرين الثاني

احسب مساحة جزء السطح $x^2 + y^2 = 3z^2$

و المقطوع بالمستويين: $z = 3$ و $z = 1$

الحل:

$$z = \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{x^2 + y^2}$$

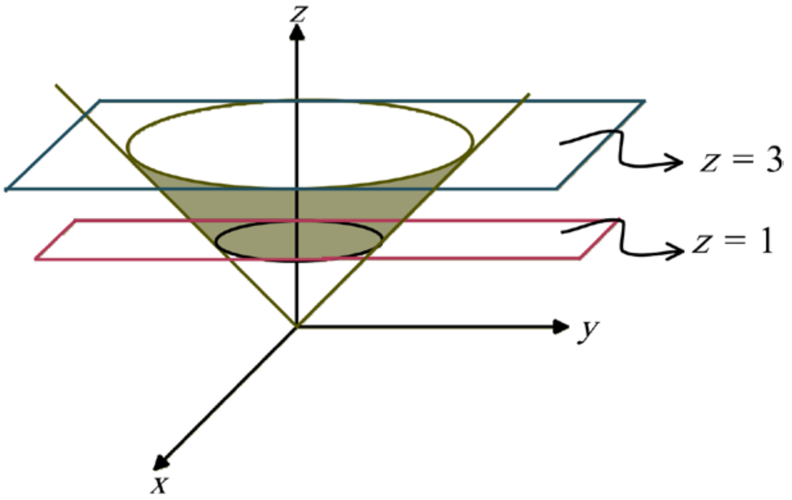
$$z'_{(x)} = \frac{2x}{2\sqrt{3}\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{x}{\sqrt{3}\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\Rightarrow z'^2_{(x)} = \frac{x^2}{3(x^2 + y^2)}$$

$$z'_{(y)} = \frac{2y}{2\sqrt{3}\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{y}{\sqrt{3}\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\Rightarrow z'^2_{(y)} = \frac{y^2}{3(x^2 + y^2)}$$

$$\mu = \sqrt{\frac{1}{3}\frac{(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} + 1} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$



بالتعويض عندما $z = 1$ يكون:

$$r^2 = 3 \Rightarrow r = \sqrt{3}$$

وعندما $z = 3$ يكون:

$$r^2 = 27 \Rightarrow r = 3\sqrt{3}$$

$$I = \int_0^{2\pi}\left[\int_{\sqrt{3}}^{3\sqrt{3}} \frac{2}{\sqrt{3}} rd(r)\right] d(\theta) = \frac{2}{\sqrt{3}}\int_0^{2\pi}\left[\frac{r^2}{2}\right]_{\sqrt{3}}^{3\sqrt{3}} d(\theta) = \frac{1}{\sqrt{3}}(24)(2\pi)$$

$$I = \frac{48\pi}{\sqrt{3}}$$

التكاملات الخطية

عندما نحسب قيمة التاكامل الخطي فاننا عمليا نسحب طول قوس المنحني وهنا يجب ان يكون التكامل بدلالة متغير وحيد

اذا كانت التكامل المعطى بالنسبة ل dl يتوجب علينا ان نحوله الى تكامل وسيطي حصرا ويتم ذلك وفق التبديل التالي: $dl \to \sqrt{x_t'^2 + y_t'^2 + z_t'^2}\,d(t)$

اذا كانت منطقة التكامل عبارة عن مجموع مستقيمات (كسحاب التكامل الخطي لمثلث) فاننا نقوم بتقسيم هذه المنطقة الى مستقيماتها و نحسب التكامل الخطي لكل منطقة على حدة

التمرين الثالث

احيب قيمة التكامل الخطي

$$I = \int_{AB} yd(x) + z(y) + xd(z)$$

حيث أن AB هو القطعة المستقيمة الواصلة بين النقطتين : $M_1(2,0,0)$, $M_2(3,4,5)$

الحل:

لنوجد معادلة المستقيم AB

$$\frac{x-2}{1} = \frac{y}{4} = \frac{z}{5} = t$$
$$x - 2 = t \to x = t + 2 \to d(x) = d(t)$$
$$y = 4t \to d(y) = 4d(t)$$
$$z = 5t \to d(z) = 5d(t)$$

لنوجد حدود التكامل :

نعوض احداثيات النقطتين في المعادلات الوسيطية للمستقيم فنجد أنه عند التعويض باحداثيات M_1 يكون $t = 0$ و عند التعويض باحداثيات M_2 يكون $t = 1$

لنعوض في التكامل:

$$I = \int_0^1 4t\mathrm{d}(\mathrm{t}) + 5t.4d(t) + (\mathrm{t}+2)\,5d(t)$$

$$I = \int_0^1 (4t + 20t + 5\mathrm{t} + 10)\,d(t) = \int_0^1 (29t + 10)\,d(t)$$

$$I = \left[\frac{29}{2}t^2 + 10t\right]_0^1 = \frac{29}{2} + 10$$

التمرين الرابع

احسب قيمة التكامل الخطي

$$I = \oint_\gamma (x + y + z)d(l)$$

حيث أن γ هو عبارة عن مثلث رؤوسه: $A(1,0,0)$, $B(0,1,0)$ $C(0,0,1)$

الحل:

وهنا كما أشرنا يتوجب علينا تقسيم المنطقة الى ثلاثة مستقيمات الا اننا نلاحظ أن طول كل من هذه المستقيمات متساو لذلك نأخذ مستقيم واحد و نحسب قيمة تكامله ونضرب بثلاثة لنوجد التكامل المطلوب

لنوج معادلة المستقيم AB

$$\frac{x-1}{-1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{0} = t$$

$$x - 1 = -\mathrm{t} \rightarrow x = -\mathrm{t} + 1 \rightarrow \mathrm{d}(\mathrm{x}) = -\mathrm{d}(\mathrm{t})$$

$$y = t \to d(y) = d(t)$$
$$z = 0 \to d(z) = 0d(t)$$

و لنوجد حدود التكامل و ذلك بتعويض احداثيي النقطتين A,B في المعادلات الوسيطية فيكون

$$t = \ 0 \ , \quad t = 1$$

لنوجد قيمة ال $d(l) = \sqrt{1+1+0}d(t) = \sqrt{2}d(t)$

$$I = \sqrt{2}\int_0^1 (-\text{t}+1+t)\,d(t) = \sqrt{2}\int_0^1 d(t) = \sqrt{2}$$

$$I_{total} = 3I = 3\sqrt{2}$$

التمرين الخامس

احسب قيمة التكامل الخطي:

$$I = \int_{\gamma} 4Sin(4t)d(l)$$

حيث ان قوس المنحني γ : $x = Sin^2(t) \quad , y = COS^2(t) \quad , \ z = t$

وهو الواصل بين النقطتين : $t = 0 \quad , t = \frac{\pi}{4}$

الحل:

$$x_t'^2 = 4Sin^2(t)COS^2(t)$$
$$y_t'^2 = 4Sin^2(t)COS^2(t)$$
$$z_t'^2 = 1$$

$$d(l) = \sqrt{4Sin^2(t)COS^2(t) + 4Sin^2(t)COS^2(t) + 1}d(t)$$

$$d(l) = \sqrt{2.4Sin^2(t)COS^2(t) + 1}d(t)$$

$$d(l) = \sqrt{2\big(2Sin(t)COS(t)\big)^2 + 1}d(t)$$

$$d(l) = \sqrt{2Sin^2(2t) + 1}d(t)$$

$$d(l) = \sqrt{2(\frac{1}{2} - \frac{COS(4t)}{2}) + 1}d(t)$$

$$d(l) = \sqrt{1 - COS(4t) + 1}d(t) \rightarrow d(l) = \sqrt{2 - COS(4t)}d(t)$$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} 4Sin(4t)\sqrt{2 - COS(4t)}d(t) = \frac{2}{3}\left[(2 - COS(4t))^{\frac{3}{2}}\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$I = \frac{2}{3}\left((2+1)^{\frac{2}{3}} - (2-1)^{\frac{3}{2}}\right) = \frac{2}{3}((3)^{\frac{2}{3}} - 1)$$

التحليل الشعاعي:

إن التوابع تقسم إلى قسمين:

1. **توابع عددية: هي توابع تعطي قيمة عددية إذا ما أدخلنا قيمة لمتحولاتها**
مثال: $f(x,y,z) = 3x + 5y + 9z$

فإذا كان x=2 & y=3 & z=5 نحصل على $f(x,y,z) = 66$

2. **توابع شعاعية: هي توابع تعطي قيمة شعاعية إذا ما أدخلنا قيمة لمتحولاتها أي تكتب بالشكل:** $\vec{F} = F_x\hat{\imath} + F_y\hat{\jmath} + F_z\hat{k}$

الاشتقاق الاتجاهي :

يؤخذ الاشتقاق الاتجاهي من النهاية:

$$\lim_{\Delta u \to 0} \frac{\vec{r}(u + \Delta U) - \vec{r}(u)}{\Delta U} = \lim_{\Delta U \to 0} \frac{\Delta r}{\Delta U} = \frac{dr}{\partial U} = \frac{dx}{\partial U}\hat{\imath} + \frac{dy}{\partial U}\hat{\jmath} + \frac{dz}{\partial U}\hat{k}$$

نسمي هذه النهاية بتفاضل $\vec{r}$ و إذا ما عكست النسب أصبحت تفاضل $\vec{u}$

مثال : أوجد الاشتقاق الاتجاهي للتابع

$$U = x^2y + y^2z^2 + xy + y$$

الحل: $\frac{dU}{dr} = (2xy + y)\hat{\imath} + (x^2 + 2yz^2 + x + 1)\hat{\jmath} + (2y^2z)\hat{k}$

التدرج:

إن الاشتقاق الاتجاهي يأخذ مناحي مختلفة و يكون أعظميا إذا كان محمولا على الناظم أي يكتب بالشكل $\frac{\partial U}{dr} = \frac{\partial u}{\partial n}\hat{n} = \frac{\partial U}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial U}{\partial y}\hat{\jmath} + \frac{\partial U}{\partial z}\hat{k}$

∇ مؤشرهاملتون

هو تابع يشتق ويوجه بآن واحد ويكتب بالشكل :

$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{\jmath} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}$ ونتعامل معه كما نتعامل مع أي شعاع

و تأثيره على التابع العددي يعطى بالشكل: $\overrightarrow{grad}.u = \vec{\nabla}U = \frac{\partial U}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial U}{\partial y}\hat{\jmath} + \frac{\partial U}{\partial z}\hat{k}$

مثال : احسب التدرج للتابع العددي $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$

الحل

$$\vec{\nabla}r^2 = \frac{\partial r^2}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial r^2}{\partial y}\hat{\jmath} + \frac{\partial r^2}{\partial z}\hat{k}$$

$$= \frac{2x}{x^2 + y^2 + z^2}\hat{\imath} + \frac{2y}{x^2 + y^2 + z^2}\hat{\jmath} + \frac{2z}{x^2 + y^2 + z^2}\hat{k}$$

لكن $\hat{r} = \frac{\vec{r}}{|r|} = \frac{1}{x^2+y^2+z^2}\hat{\imath} + \frac{1}{x^2+y^2+z^2}\hat{\jmath} + \frac{1}{x^2+y^2+z^2}\hat{k}$

نعوض : $\vec{\nabla}r^2 = 2r\hat{r}$

نلاحظ **أنه** عند الاشتقاق لأي تابع عددي و تحويله إلى تابع شعاعي لا بد من إضافة شعاع الواحدة الذي يعطي مشتق التابع العددي جهة

سؤال امتحان :استنتج علاقة تدرج للتفاضل التام :

العلاقة المطلوب استنتاج علاقة تدرج لها: $\partial U = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy + \frac{\partial U}{\partial z}dz$

كما نعلم مسبقا $\vec{\nabla}U = \frac{\partial U}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial U}{\partial y}\hat{\jmath} + \frac{\partial U}{\partial z}\hat{k}$ و $d\vec{r} = dx\hat{\imath} + dy\hat{\jmath} + dz\hat{k}$

بأخذ جداء الداخلي هذين الشعاعين:

$d\vec{r}.\vec{\nabla}U = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy + \frac{\partial U}{\partial z}dz = du$ و هو المطلوب

ملاحظة : إن $u\vec{\nabla}$ لا معنى لها و يجب أن تكتب $\vec{\nabla}U$

تأثير ∇ على تابع شعاعي :

التفرق :

يحسب من العلاقة: $\overrightarrow{div}F = \vec{\nabla}.\vec{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$

مثال : $\vec{F} = x^2yz\hat{\imath} - xy\hat{\jmath} + z^3\hat{k}$ أوجد تفرق التابع $\vec{F}$

الحل: $\vec{\nabla}.\vec{F} = 2xyz - x + 3z^2$

مثال 2 : أوجد تفرق التابع $\vec{F} = x^2yz\hat{\imath} - xy^2z\hat{\jmath} + xy\hat{k}$

الحل : $\vec{\nabla}.\vec{F} = 2xyz - 2xyz = 0$ أي أن التابع $\vec{F}$ هو شعاع لولبي

الدوران :

نعرف الدوران بأنه الجداء الشعاعي: $\overrightarrow{rot}F = \vec{\nabla}\wedge\vec{F}$ أي

$$\overrightarrow{rot}F = \vec{\nabla}\wedge\vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

مثال : أوجد دوران التابع $\vec{F} = x^2y\hat{\imath} + y^2z\hat{\jmath} + z^2x\hat{k}$

الحل

$$\vec{\nabla}\wedge\vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2y & y^2z & z^2x \end{vmatrix} = -y^2\hat{\imath} - z^2\hat{\jmath} - x^2\hat{k}$$

مثال 2 أوجد دوران شعاع الموضع

الحل : $0 = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x & y & z \end{vmatrix} = \vec{\nabla}\wedge\vec{F}$ أي أن شعاع الموضع تابع كموني(محافظ)

ملاحظة: إن إي تابع كموني يكتب بالشكل : $\vec{F} = \vec{\nabla}.U$

المشتقات الشعاعية من المرتبة الثانية:

المؤشر اللابلاسي:$\overrightarrow{\nabla^2}$

يؤخذ من العلاقة :

$$\vec{\nabla}.(\vec{\nabla}U) = \frac{\partial}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{\jmath} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}.\left(\frac{\partial U}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial U}{\partial y}\hat{\jmath} + \frac{\partial U}{\partial z}\hat{k}\right)$$

$$\vec{\nabla}.(\vec{\nabla}U) = \frac{\partial^2 F_x}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 F_y}{\partial^2 y} + \frac{\partial^2 F_z}{\partial^2 z}$$

مثال:$\nabla^2 U = 2 + 0 + 2y$ $\quad U = x^2 - 2y + z^2 y$

مثال2: $\nabla^2 U = 2 - 2 + 0 = 0$ $\quad U = x^2 - y^2 + xyz$

ومنه الخاصة التالية: $\nabla^2 U = 0$: إذا U تابع توافقي

تفرق الدوران : $\overrightarrow{div}(\overrightarrow{rot}F)$

يؤخذ من العلاقة التالية:$\overrightarrow{div}(\overrightarrow{rot}F) = \vec{\nabla}\wedge(\vec{\nabla}U)$

ملاحظة : إذا كان الشعاع $\vec{F}$ كموني فإن تفرق الدوران الخاص به مساو للصفر

وإن تفرق دوران أي تابع عددي يكون صفرا حسب خاصة المحددات السابقة

المشتقات الشعاعية للإحداثيات المنحنية $U(u, v, w)$:

حيث $w(x, y, z)$ $\quad v(x, y, z)$ $\quad u(x, y, z)$

إن الاحداثيات المنحنية هي جملة إحداثيات غير ثابتة أي تتحرك مع النقطة المادية M فإذا رمزنا لأشعة الواحدة ب

مع الانتباه أن
شعاع الواحدة
يساوي الشعاع
على طوياته

$$\hat{u}=\frac{\frac{\partial\vec{r}}{\partial u}}{\left|\frac{\partial\vec{r}}{\partial u}\right|}\qquad \hat{v}=\frac{\frac{\partial\vec{r}}{\partial v}}{\left|\frac{\partial\vec{r}}{\partial v}\right|}\qquad \hat{w}=\frac{\frac{\partial\vec{r}}{\partial w}}{\left|\frac{\partial\vec{r}}{\partial w}\right|}$$

حيث $\vec{r}(x,y,z)=\vec{r}=x\hat{\imath}+y\hat{\jmath}+z\hat{k}\ =\vec{r}(u,v,w)$

نعلم أن $\overrightarrow{dr}=\frac{\partial\vec{r}}{\partial u}du+\frac{\partial\vec{r}}{\partial v}dv+\frac{\partial\vec{r}}{\partial w}dw$

وأن $dU=\frac{\partial U}{\partial u}du+\frac{\partial U}{\partial v}dv+\frac{\partial U}{\partial w}dw \qquad (1)$

بالتالي حسب العلاقة السابقة لأشعة الواحدة :

$$\frac{\partial\vec{r}}{\partial u}=\left|\frac{\partial\vec{r}}{\partial u}\right|\hat{u}\qquad \frac{\partial\vec{r}}{\partial v}=\left|\frac{\partial\vec{r}}{\partial v}\right|\hat{v}\qquad \frac{\partial\vec{r}}{\partial w}=\left|\frac{\partial\vec{r}}{\partial w}\right|\hat{w}$$

بفرض أن :

$$h_u=\left|\frac{\partial\vec{r}}{\partial u}\right|\qquad h_v=\left|\frac{\partial\vec{r}}{\partial v}\right|\qquad h_w=\left|\frac{\partial\vec{r}}{\partial w}\right|$$

حيث إن $|\vec{a}|$ تمثل طويلة هذا الشعاع

أي أن $\overrightarrow{dr}=h_u du\hat{u}+h_v dv\hat{v}+\ h_w dw\hat{w} \qquad (2)$

و الآن لنكتب علاقة التدرج بالشكل الآتي:

$$\vec{\nabla}.U=\lambda_u\hat{u}+\lambda_v\hat{v}+\lambda_w\hat{w} \qquad (3)$$

الآن لنحسب المجاهيل $\lambda_u\&\ \lambda_v\ \&\ \lambda_w$ وذلك بتعويض علاقة التفرق للتدرج التام المستنتجة سابقا في كل من العلاقات (1),(2),(3) أي

$$d\vec{r}.\vec{\nabla}U=dU$$

$$h_u du\lambda_u+h_v dv\lambda_v+h_w dw\lambda_w=\frac{\partial U}{\partial u}du+\frac{\partial U}{\partial v}dv+\frac{\partial U}{\partial w}dw$$

بالتالي : $h_u\lambda_u=\frac{\partial U}{\partial u}\qquad h_v\lambda_v=\frac{\partial U}{\partial v}\qquad h_w\lambda_w=\frac{\partial U}{\partial w}$

أي : $\lambda_u=\frac{1}{h_u}.\frac{\partial U}{\partial u}\qquad \lambda_v=\frac{1}{h_v}.\frac{\partial U}{\partial v}\qquad \lambda_w=\frac{1}{h_w}.\frac{\partial U}{\partial w}\qquad (4)$

نعوض (4) في (3) لنجد :

$$\vec{\nabla}.U=\frac{1}{h_u}.\frac{\partial U}{\partial u}\hat{u}+\frac{1}{h_v}.\frac{\partial U}{\partial v}\hat{v}+\frac{1}{h_w}.\frac{\partial U}{\partial w}\hat{w}$$

مثال: استنتج التفرق ديكارتيا و كرويا و اسطوانيا :

1. ديكارتيا : $\vec{r}=x\hat{\imath}+y\hat{\jmath}+z\hat{k}$

نعوض في العلاقة السابقة في التفرق مع الانتباه أن

$$h_{u=x}=\left|\frac{\partial\vec{r}}{\partial u}\right|=\left|\frac{\partial\vec{r}}{\partial x}\right|=1\qquad h_{v=y}=\left|\frac{\partial\vec{r}}{\partial v}\right|=\left|\frac{\partial\vec{r}}{\partial y}\right|=1$$

$$h_{w=z}=\left|\frac{\partial\vec{r}}{\partial w}\right|=\left|\frac{\partial\vec{r}}{\partial z}\right|=1$$

فينتج لدينا: $\vec{\nabla}.U=\frac{\partial U}{\partial x}\hat{\imath}+\frac{\partial U}{\partial y}\hat{\jmath}+\frac{\partial U}{\partial z}\hat{k}$

2. اسطوانيا : $\vec{r}(r,\theta,z)=r\cos\theta\,\hat{\imath}+r\sin\theta\,\hat{\jmath}+z\hat{k}$

نعوض في العلاقة السابقة مع الانتباه أن :

$$h_{u=r}=\left|\frac{\partial\vec{r}}{\partial u}\right|=\left|\frac{\partial\vec{r}}{\partial r}\right|=\left|\cos\theta\,\hat{\imath}+\sin\theta\,\hat{\theta}\right|=\sqrt{\cos^2\theta+\sin^2\theta}=1$$

$$h_{v=\theta}=\left|\frac{\partial\vec{r}}{\partial v}\right|=\left|\frac{\partial\vec{r}}{\partial\theta}\right|=\left|-r\sin\theta\,\hat{\imath}++r\cos\theta\,\hat{\theta}\right|=r$$

$$h_{w=z}=\left|\frac{\partial\vec{r}}{\partial w}\right|=\left|\frac{\partial\vec{r}}{\partial z}\right|=1$$

فينتج لدينا: $\vec{\nabla}.U=\frac{\partial U}{\partial r}\hat{r}+\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial\theta}\hat{\theta}+\frac{\partial U}{\partial z}\hat{k}$

3. كرويا: $\vec{r}(r,\theta,z)=r\sin\theta\cos\varphi\,\hat{r}+r\sin\theta\sin\varphi\,\hat{\theta}+r\cos\theta\,\hat{\varphi}$

نعوض في العلاقة السابقة مع الانتباه أن:

$$h_{u=r} = \left|\frac{\partial\vec{r}}{\partial u}\right| = \left|\frac{\partial\vec{r}}{\partial r}\right| = |\sin\theta\cos\varphi\,\hat{r} + \sin\theta\sin\varphi\,\hat{\theta} + \cos\theta\,\hat{\varphi}| =$$

$$\sqrt{\sin^2\theta\cos^2\varphi + \sin^2\theta\sin^2\varphi + \cos^2\theta} =$$

$$\sqrt{\sin^2\theta\,(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) + \cos^2\theta} = \sqrt{\sin^2\theta + \cos^2\theta} = 1$$

$$h_{v=\theta} = \left|\frac{\partial\vec{r}}{\partial v}\right| = \left|\frac{\partial\vec{r}}{\partial \theta}\right| = |r\cos\theta\cos\varphi\,\hat{r} + r\cos\theta\sin\varphi\,\hat{\theta} - r\sin\theta\,\hat{\varphi}|$$

$$= \sqrt{r^2\cos^2\theta\cos^2\varphi + r^2\cos^2\theta\sin^2\varphi + r^2\sin^2\theta}$$

$$\sqrt{r^2\cos^2\theta\,(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) + r^2\sin^2\theta} = \sqrt{r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta} = r$$

$$h_{w=\varphi} = \left|\frac{\partial\vec{r}}{\partial w}\right| = \left|\frac{\partial\vec{r}}{\partial \varphi}\right| = |-r\sin\theta\sin\varphi\,\hat{r} + r\sin\theta\cos\varphi\,\hat{\theta}| =$$

$$\sqrt{r^2\sin^2\theta\sin^2\varphi + r^2\sin^2\theta\cos^2\varphi} = \sqrt{r^2\sin^2\theta\,(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi)} = r\sin\theta$$

أي: $h_{u=r} = 1 \qquad h_{v=\theta} = r \qquad h_{w=\varphi} = r\sin\theta$

فينتج لدينا: $\vec{\nabla}.U = \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial r}\hat{r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial U}{\partial\theta}\hat{\theta} + \frac{\partial U}{\partial\varphi}\hat{\varphi}$

بالتالي $\vec{\nabla} = \frac{1}{h_u}.\frac{\partial}{\partial u}\hat{u} + \frac{1}{h_v}.\frac{\partial}{\partial v}\hat{v} + \frac{1}{h_w}.\frac{\partial}{\partial w}\hat{w} \qquad (5)$

الآن لنستنتج التفرق و الدوران و اللابلاسيان للتوابع المنحنية :

1. التفرق : لنكتب قانون التفرق بالشكل :

$$\vec{\nabla}.\vec{F} = \left(\frac{1}{h_u}.\frac{\partial}{\partial u}\hat{u} + \frac{1}{h_v}.\frac{\partial}{\partial v}\hat{v} + \frac{1}{h_w}.\frac{\partial}{\partial w}\hat{w}\right).(F_u\hat{u} + F_v\hat{v} + F_w\hat{w}) =$$

$$\left(\frac{1}{h_u}.\frac{\partial}{\partial u}F_u + \frac{1}{h_v}.\frac{\partial}{\partial v}F_v + \frac{1}{h_w}.\frac{\partial}{\partial w}F_w\right)$$

بإخراج $\frac{1}{h_u h_v h_w}$ عاملا مشتركا نجد أن

$$\vec{\nabla}.\vec{F} = \frac{1}{h_u h_v h_w}\left(.\frac{\partial}{\partial u}h_v h_w F_u + .\frac{\partial}{\partial v}h_u h_v F_v + .\frac{\partial}{\partial w}h - u\ h_v F_w\right)$$

بالتعويض في الاحداثيات الديكارتية نجد أن :

$$\vec{\nabla}.\vec{F}=\frac{\partial F_x}{\partial x}+\frac{\partial F_y}{\partial y}+\frac{\partial F_z}{\partial z}$$

بالتعويض في الاحداثيات الاسطوانية نجد أن:

$$\vec{\nabla}.\vec{F}=\frac{1}{r}\left(\frac{\partial(rF_r)}{\partial r}+\frac{\partial(F_\theta)}{\partial\theta}+\frac{\partial(rF_z)}{\partial z}\right)$$

بالتعويض في الاحداثيات الكروية نجد أن:

$$\vec{\nabla}.\vec{F}=\frac{1}{r^2\sin\theta}\left(\frac{\partial(r^2\sin\theta\,F_r)}{\partial r}+\frac{\partial(r\sin\theta\,F_\theta)}{\partial\theta}+\frac{\partial\left(rF_\varphi\right)}{\partial\varphi}\right)$$

2. الدوران : نعوض $\vec{\nabla}$ و $\vec{F}$ في قانون الدوران (الجداء الشعاعي لهما)

$$\vec{\nabla}\wedge\vec{F}=\begin{vmatrix}\hat{u} & \hat{v} & \hat{w}\\ \frac{1}{h_u}\frac{\partial}{\partial u} & \frac{1}{h_v}\frac{\partial}{\partial v} & \frac{1}{h_w}\frac{\partial}{\partial w}\\ F_u & F_v & F_w\end{vmatrix}$$

بإخراج $\frac{1}{h_u h_v h_w}$ عاملا مشتركا مع الانتباه أنه إذا ما أردنا إخراج عامل مشترك من محدد ما يجب إخراجه من جميع عناصر السطر أو العمود أي

نجد أن $$\vec{\nabla}\wedge\vec{F}=\frac{1}{h_u h_v h_w}\begin{vmatrix}h_u\hat{u} & h_v\hat{v} & h_w\hat{w}\\ \frac{\partial}{\partial u} & \frac{\partial}{\partial v} & \frac{\partial}{\partial w}\\ h_uF_u & h_vF_v & h_wF_w\end{vmatrix}$$

بالتعويض في الاحداثيات الديكارتية نجد أن :

$$\vec{\nabla}\wedge\vec{F}=\begin{vmatrix}\hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ F_x & F_y & F_z\end{vmatrix}$$

بالتعويض في الاحداثيات الاسطوانية نجد أن :

$$\vec{\nabla}\wedge\vec{F}=\frac{1}{r}\begin{vmatrix}\hat{r} & r\hat{\theta} & \hat{k}\\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial z}\\ F_r & F_\theta & F_z\end{vmatrix}$$

بالتعويض في الاحداثيات الكروية نجد أن :

$$\vec{\nabla}\wedge\vec{F}=\frac{1}{r^2\sin\theta}\begin{vmatrix}\hat{r} & r\hat{\theta} & r\sin\theta\,\hat{\varphi}\\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \varphi}\\ F_r & F_\theta & r\sin\theta\, F_\varphi\end{vmatrix}$$

3. اللابلاسيان :

$$\vec{\vec{\nabla}^2}U=\vec{\nabla}.\vec{\nabla}U$$

$$=\left(\frac{1}{h_u}.\frac{\partial}{\partial u}\hat{u}+\frac{1}{h_v}.\frac{\partial}{\partial v}\hat{v}+\frac{1}{h_w}.\frac{\partial}{\partial w}\hat{w}\right).\left(\frac{1}{h_u}.\frac{\partial U}{\partial u}\hat{u}+\frac{1}{h_v}.\frac{\partial U}{\partial v}\hat{v}+\frac{1}{h_w}.\frac{\partial U}{\partial w}\hat{w}\right)$$

$$\vec{\nabla}.\vec{\nabla}U=\left(\frac{1}{h_u}.\frac{\partial}{\partial u}\frac{1}{h_u}.\frac{\partial U}{\partial u}+\frac{1}{h_v}.\frac{\partial}{\partial v}\frac{1}{h_v}.\frac{\partial U}{\partial v}+\frac{1}{h_w}.\frac{\partial}{\partial w}\frac{1}{h_w}.\frac{\partial U}{\partial w}\right)$$

بإخراج $\frac{1}{h_u h_v h_w}$ عاملا مشتركا

$$\vec{\nabla}.\vec{\nabla}U=\frac{1}{h_u h_v h_w}\left(\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{h_v h_w}{h_u}.\frac{\partial U}{\partial u}\right)+\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{h_u h_w}{h_v}.\frac{\partial U}{\partial v}\right)+\frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{h_u h_v}{h_w}.\frac{\partial U}{\partial w}\right)\right)$$

بالتعويض في الاحداثيات الديكارتية نجد أن :

$$\vec{\nabla}^2U=\frac{\partial^2U}{\partial^2x}+\frac{\partial^2U}{\partial^2y}+\frac{\partial^2U}{\partial^2z}$$

بالتعويض في الاحداثيات الاسطوانية مع مراعاة أن

$$:h_{u=r}=1\qquad h_{v=\theta}=r\qquad h_{w=z}=1$$

نجد أن

$$\vec{\nabla}^2U=\frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial U}{\partial r}\right)+\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial \theta}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(r\frac{\partial U}{\partial z}\right)\right)$$

بالتعويض في الاحداثيات الكروية مع مراعاة أن

$$h_{u=r}=1 \qquad h_{v=\theta}=r \qquad h_{w=\varphi}=r\sin\theta$$

نجد أن

$$\vec{\nabla}^2 U=\frac{1}{r^2\sin\theta}\left(\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\sin\theta\frac{\partial U}{\partial r}\right)+\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial U}{\partial\theta}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial U}{\partial z}\right)\right)$$

الجولان

إن جولان أي تابع $\vec{F}$ حول المنحني $U(x,y,z)$ الصقيل الموجه بشعاع توجيه مماس يعطى بالعلاقة: $\int_\Gamma \vec{F}.\vec{dl}$ حيث $\vec{dl}=dx\hat{\imath}+dy\hat{\jmath}+dz\hat{k}$ أي يصبح لدينا :

$$\int_\Gamma \vec{F}.\vec{dl}=\int F_x dx+\int F_y dy+\int F_z dz$$

و إن هذا التكامل يرتبط بالمنحني $U(x,y,z)$

حالات خاصة :

1. في حال $\vec{F}$ كموني عندئذ يستقل عن المسار $U(x,y,z)$ و تصبح قيمة الجولان :

$$\int_\Gamma \vec{F}.\vec{dl}=F(b)-F(a)$$

حيث a,b تمثلان حدود التكامل

2. في حال $\vec{F}$ كموني و مغلق عندئذ $\oint \vec{F}.\vec{dl}=0$
3. في حال $\vec{F}$ مستمر فالجولان يمثل العمل التي تقوم به $\vec{F}$ على المنحني $U(x,y,z)$

مثال : احسب جولان التابع $\vec{F}=2y\hat{\imath}+3x\hat{\jmath}-z\hat{k}$ حول المنحني الموجه الناتج عن تقاطع السطحين $z=\sqrt{9-x^2-y^2} \qquad z=0$

الحل :

$$\oint \vec{F}.\vec{dl}=\int F_x dx+\int F_y dy+\int F_z dz$$

$$x = 3\cos t \Longrightarrow dx = -3\sin t\, dt$$

$$y = 3\sin t \Longrightarrow dy = 3\cos t\, dt$$

$$z = 0 \Longrightarrow dz = 0$$

بالتعويض:

$$\oint \vec{F}.\overrightarrow{dl} = \int_0^{2\pi} 2(3\,sin\,t)(-3\,sin\,t\,dt) + 3(3\,cos\,t)(3\,cos\,t\,dt)$$

$$= \int_0^{2\pi} -2(9\sin^2 t\,dt) + 3(9\cos^2 t\,dt)$$

$$\int_0^{2\pi} -18(\frac{1-\cos 2t}{2}dt) + 27(\frac{1-cos\,2t}{2}dt)$$

$$= \left[-18\left(\frac{1}{2}t - \frac{\sin 2t}{4}\right) + 27\left(\frac{1}{2}t + \frac{sin\,2t}{4}\right)\right]_0^{2\pi}$$

$$= -18\pi + 27\pi = 9\pi$$

نظرية غاوس في التفرق

س: اذكر نص نظرية غاوس

ج: إن تدفق حقل شعاعي $\vec{F}$ عبر سطح مغلق يساوي إلى التكامل الحجمي لتفرق الحقل $\vec{F}$

على الحجم الذي يحدده السطح المغلق σ أي

$$\oiint_{\sigma} \vec{F}.\overrightarrow{ds} = \iiint (\vec{\nabla}.\vec{F})dv$$

ملاحظة : يجب ذكر النص و التكامل سوية إذا ذكر هذا السؤال

مثال:

احسب تدفق الحقل $\vec{F}$ حيث $\vec{F} = 4xz\hat{\imath} - y^2\hat{\jmath} + yz\hat{k}$ عبر السطح الموجب المعين ب

$$x = y = z = 1 \qquad\qquad x = y = z = 0$$

الحل:

1. لنحسب $(\vec{\nabla}.\vec{F})$

$$(\vec{\nabla}.\vec{F}) = 4z - 2y + y = 4z - y$$

2. لنعوض في التكامل :

$$\oiint_{\sigma} \vec{F}.\overrightarrow{ds} = \int_0^1 \int_0^1 \left[\int_0^1 (4y - z)dz \right] dxdy$$

$$= \int_0^1 \int_0^1 |2z^2 - yz|_0^1 \, dxdy = \int_0^1 \left[\int_0^1 (2 - y)\, dx \right] dy$$

$$= \int_0^1 |2x - yx|_0^1 dy = \int_0^1 (2 - y)\, dy = \left| 2y - \frac{y^2}{2} \right|_0^1 = \frac{3}{2}$$

$$\oiint_{\sigma} \vec{F}.\overrightarrow{ds} = \frac{3}{2}$$

توجيه السطح:

يتم توجيه أي سطح وفقا لاتجاه ناظمه وفق قاعدة اليد اليمنى بحيث يكون الناظم منطبق على الابهام وبقية الأصابع تدور بالجهة المطلوبة

نظرية ستوكس:

س: اذكر نص نظرية ستوكس

ج: ليكن السطح σ صقيل وموجود في أي نطاق فراغي عندئذ إن تدفق دوران الحقل الشعاعي $\vec{F}$ عبر السطح σ يساوي إلى جولان هذا الحقل $\vec{F}$ على المنحني المغلق Γ الذي يحدد بالسطح σ

أي إن :

$$\iint_{\sigma} (\vec{\nabla}\Lambda\vec{F})\overrightarrow{ds} = \oint \vec{F}.\overrightarrow{ds} \qquad \overrightarrow{ds} = \overrightarrow{dl}$$

ملاحظة : يجب ذكر النص و التكامل سوية إذا ذكر هذا السؤال

ملاحظة :في هذه النظرية نحسب كل شق على حدة و يجب أن يكون الجواب نفسه في كلتا الحالتين

مثال: حقق نظرية ستوكس من أجل الحقل :

$$\vec{F} = xy\hat{\imath} + x\hat{\jmath} + xz\hat{k}$$

عبر السطح الناتج عن تقاطع المنحني $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ مع المستوي $z = 0$

الحل:

A. لنأخذ الشق اليميني من ستوكس :

$$\oint \vec{F}.\overrightarrow{ds} = \int F_x dx + F_y dy + F_z dz$$

حيث $\overrightarrow{ds} = \overrightarrow{dl} = dx\hat{\imath} + dy\hat{\jmath} + dz\hat{k}$ أي

$$\oint \vec{F}.\overrightarrow{ds} = \int_0^{2\pi} xydx + xdy + xzdz$$

حيث $dx = -5\sin t\, dt$ $\qquad x = 5\cos t$

$dy = 5\cos t\, dt$ $\qquad y = 5\sin t$

$dz = 0$ $\qquad z = 0$

$$\oint \vec{F}.\overrightarrow{ds} = \int_0^{2\pi} (5\,cos\,t)(5\,sin\,t)(-5\,sin\,t\,dt) + (5\,cos\,t)(5\,cos\,t\,dt)$$

$$= \int_0^{2\pi} -125\sin^2 t\cos t\,dt + 25\cos^2 t\,dt$$

$$= (-125)\left[\frac{\sin^3 t}{3}\right]_0^{2\pi} + 25\left[\frac{1}{2}t + \frac{\sin 2t}{4}\right]_0^{2\pi} = 25\pi$$

.B لنأخذ الآن الشق اليساري من ستوكس

$$(\vec{\nabla}\Lambda\vec{F}) = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ xy & x & xz \end{vmatrix} = -Z\hat{\jmath} + (1-x)\hat{k}$$

أي أن $(\vec{\nabla}\Lambda\vec{F}).\overrightarrow{ds} = \left(-z\hat{\jmath} + (1-x)\hat{k}\right).\hat{n}$

لكن في هذا المثال : $\hat{n} = \hat{k}$ بالتعويض $(\vec{\nabla}\Lambda\vec{F}).\overrightarrow{ds} = 1 - x$

و العودة للإحداثيات القطبية نجد أن

$$\int_0^{2\pi}\int_0^5 (1 - r\cos\theta)\, rdrd\theta = \int_0^{2\pi} \frac{25}{2} + \frac{125}{3}\cos\theta\, d\theta$$

$$= \left[\frac{25}{2}\theta + \frac{125}{3}\sin\theta\right]_0^{2\pi} = 25\pi$$

نظرية غرين في المستوي

هي حالة خاصة من نظرية ستوكس حيث يكون للحقل الشعاعي مركبتين فقط أي

$$\vec{F} = F_x\hat{\imath} + F_y\hat{\jmath}$$

و يتابع الحل كالسابق

ملاحظة : $(\vec{\nabla}\Lambda\vec{F}) = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & 0 \end{vmatrix} = (\dfrac{\partial F_y}{\partial x} - \dfrac{\partial F_y}{\partial y})\hat{k}$ بالتعويض في المعادلة العامة:

$$\iint_\sigma \left[\left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_y}{\partial y}\right)\hat{k}\right].\hat{n} = \oint F_x dx + F_y dy$$

بالتعويض كلا من $\vec{F}$ والسطح σ و المنحني Γ في كلا طرفي المعادلة السابقة نحصل على إجابتين منطبقتين كما في السابق.